海洋工程波浪力学

中国海洋大学工程学院海洋工程系
王树青

目 录

第一章 液体表面波基本方程

- 1.1 流体动力学的基本方程
  - 1.1.1 连续方程
  - 1.1.2 理想流体的运动方程
  - 1.1.3 运动方程的几个积分
- 1.2 液体表面波的基本方程
  - 1.2.1 势波的概念
  - 1.2.2 基本方程、边界条件

1.1 流体动力学的基本方程

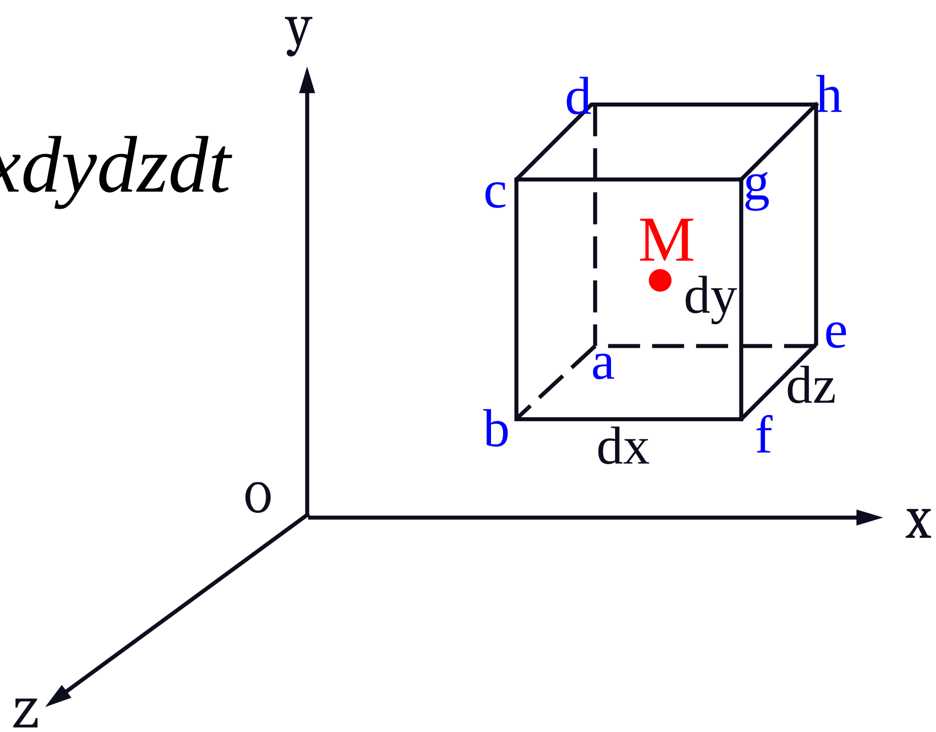
1.1.1 连续方程

质量守恒定律:

单位时间内流进、流出控制体的流体质量差等于控制体内流体密度发生变化所引起的质量增量。

$$-\left[\frac{\partial\rho u_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho u_y}{\partial y}+\frac{\partial\rho u_z}{\partial z}\right]dxdydzdt$$

$$=\quad(\frac{\partial\rho}{\partial t}dt)dxdydz$$



1.1.1 连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho u_y}{\partial y}+\frac{\partial \rho u_z}{\partial z}=0$$

—— 流体的三维流动连续性微分方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{u})=0$$

$$\frac{d\rho}{\partial t}+\rho\nabla\cdot\vec{u}=0$$

1.1.1 连续方程

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho u_y}{\partial y}+\frac{\partial \rho u_z}{\partial z}=0}$$

◆不可压缩流体（$\rho=$常数）

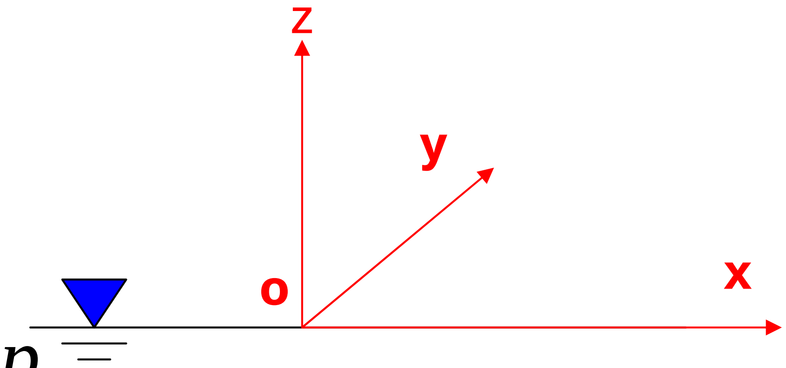
$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

或

$$\nabla\cdot\vec{u}=0$$

1.1.2 理想流体的运动方程

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$



$$\frac{du_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{du_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{du_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

1.1.2 理想流体的运动方程

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

○ 1.1.3 运动方程的几个积分

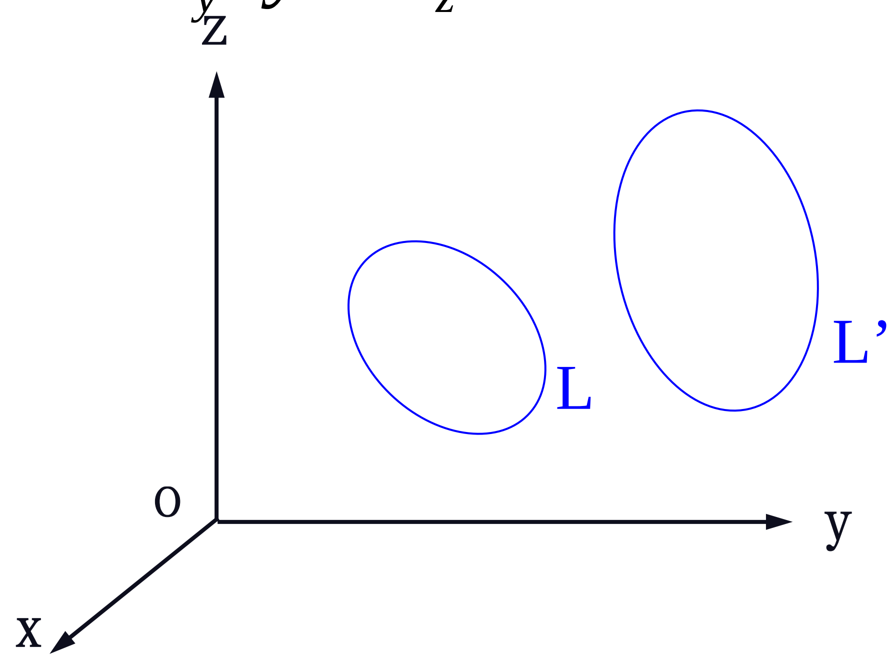
一　Helmholtz环量积分定理

❖ 速度环量

速度环量：流场中流速沿任一封闭曲线L的线积分

$$\Gamma=\oint_L \vec{u}\cdot d\vec{L}=\oint_L u_x dx+u_y dy+u_z dz$$

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint_L \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot d\boldsymbol{L}$$



1.1.3 运动方程的几个积分

一 Helmholtz环量积分定理

理想、正压流体在有势的质量力作用下，沿任何封闭流体周线的速度环量不随时间变化，即：

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint_L \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot d\boldsymbol{L}=0$$

证明：

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint_L\left(\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\cdot d\boldsymbol{L}=\underbrace{\cancel{\oint_L \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{L}}}_{0}-\underbrace{\cancel{\oint_L \frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\boldsymbol{L}}}_{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma}{dt}=0$$

1.1.3 运动方程的几个积分

二 定常流动的伯努利积分

成立条件：理想不可压缩恒定流体，在质量力有势的情况下，沿流线成立。

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=C_l$$

1.1.3 运动方程的几个积分

三 非定常无旋流动的拉格朗日积分

❖ 无旋运动存在速度势函数

对于无旋流场，处处满足：$\nabla\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$，由矢量分析知，任一标量函数梯度的旋度恒为零，所以速度一定是某个标量函数$\varphi(x,y,z,t)$的梯度，即

$$\boldsymbol{u}=\nabla\varphi \longrightarrow \begin{cases} u_x(x,y,z,t)=\dfrac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial x} \\ u_y(x,y,z,t)=\dfrac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial y} \\ u_z(x,y,z,t)=\dfrac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial z} \end{cases}$$

流场的速度等于势函数的梯度。因此，称为速度势函数，简称速度势；称无旋流动为有势流动，简称势流。

○ 1.1.3 运动方程的几个积分

三 非定常无旋流动的拉格朗日积分

❖ 不可压缩流体速度势函数满足拉普拉斯方程;

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \longrightarrow \nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi=\Delta\varphi=0$$

❖ z向运动方程积分

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_z}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_z=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial z}+(\nabla\varphi\cdot\nabla)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi)+\frac{p}{\rho}+gz=C(t)$$

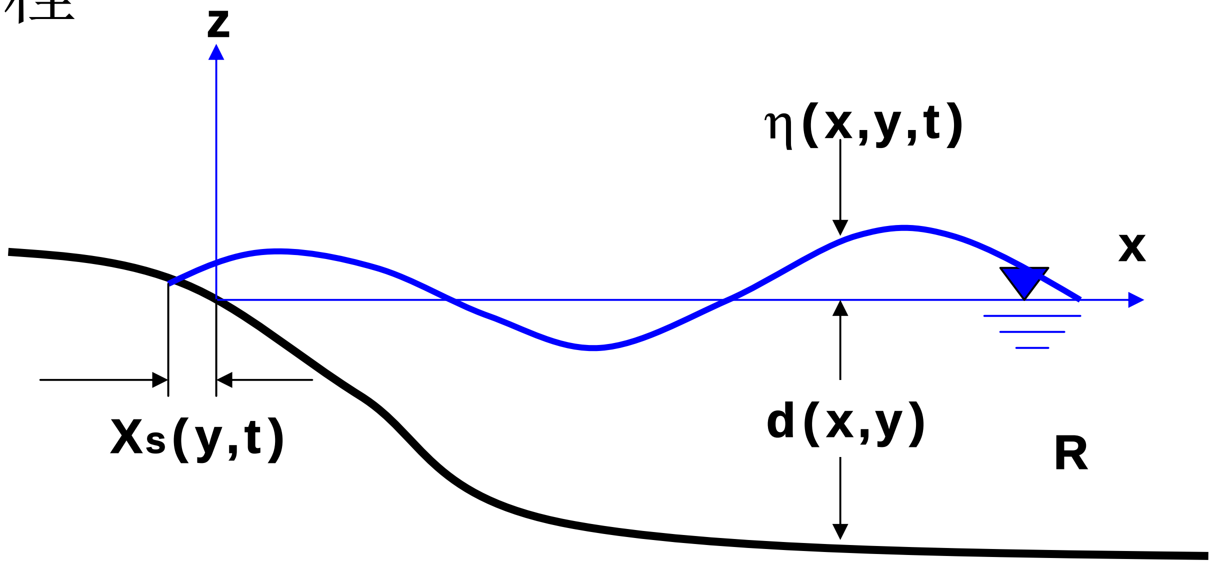
1.2 液体表面波的基本方程

- **1.2.1** 势波的概念

阅读课本**p5－6**，

了解液体表面波为势波的概念！

❖ Laplace方程

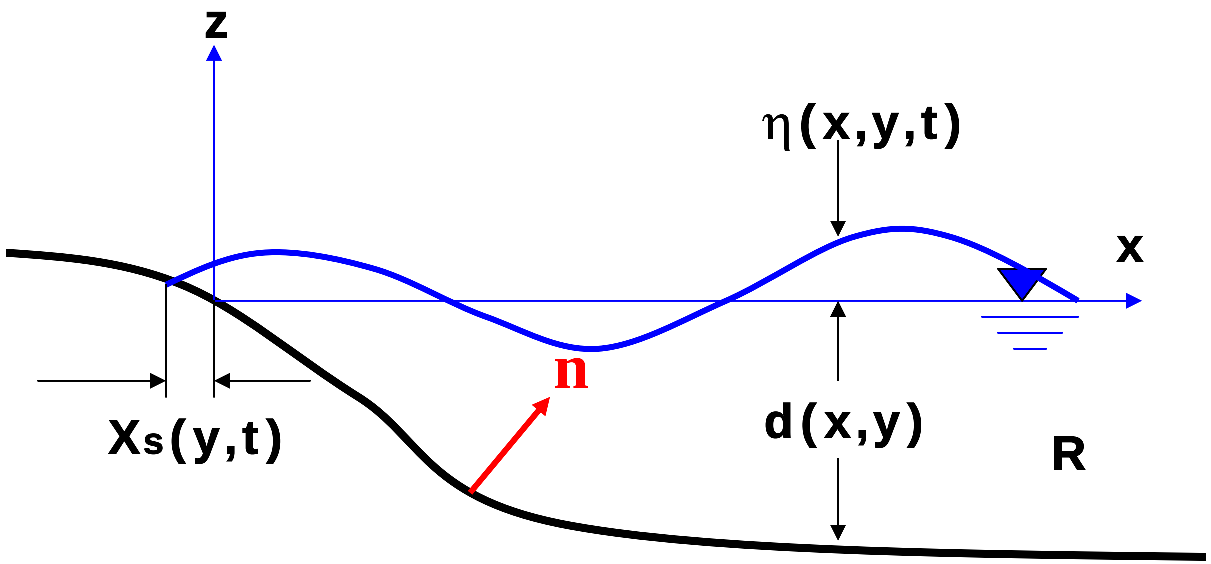


$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

❖ 边界条件

1. 海底的运动边界条件

$$u_n\big|_{z=-d}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{z=-d}=0 \qquad u_z\big|_{z=-d}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=-d}=0$$



❖ 边界条件

2. 自由表面的运动边界条件

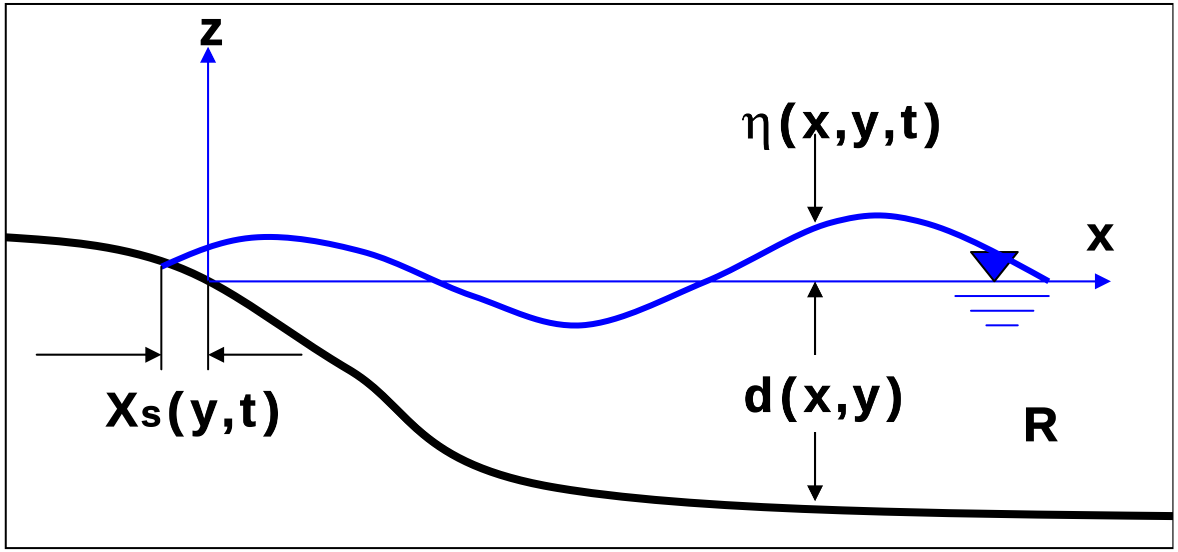
自由表面方程：z=η(x,y,t)

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=u_z=\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \frac{dx}{dt}=u_x=\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad \frac{dy}{dt}=u_y=\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=\eta}=\frac{\partial \eta}{\partial t}+\left.\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{z=\eta}+\left.\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{z=\eta}$$

说明：自由水面形状是由位于自由水面上的各水质点组成，因此自由水面上各点的运动速度等于位于自由水面上各水质点的运动速度；



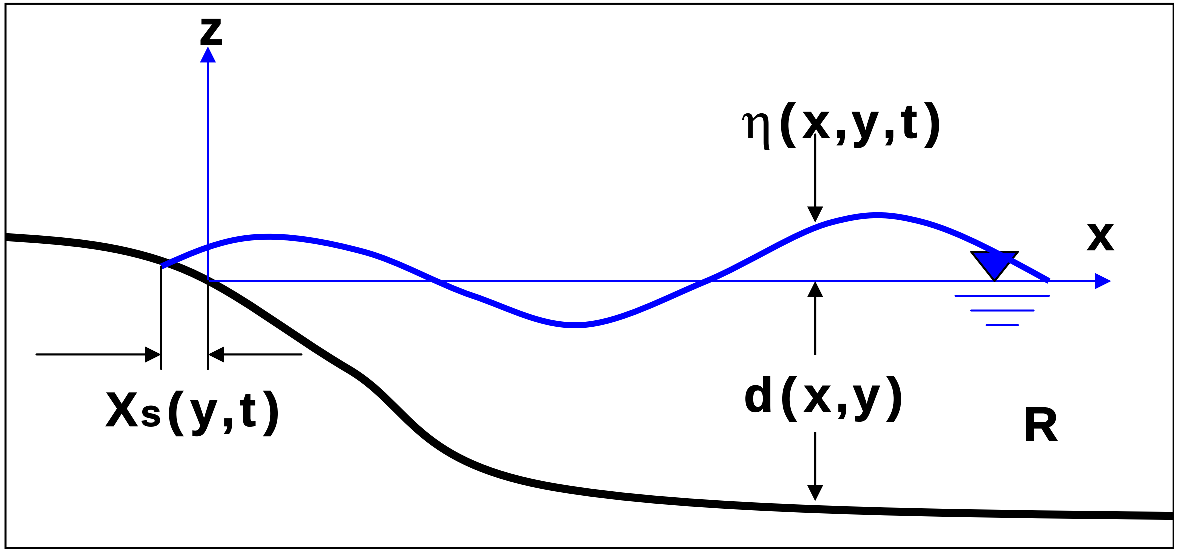
❖ 边界条件

3. 自由表面的动力边界条件

自由表面的压强p = 大气压（取相对压强Pa = 0）

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi)+\frac{p}{\rho}+gz=0$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{z=\eta}+\left.\frac{1}{2}(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi)\right|_{z=\eta}+g\eta=0$$



$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$u_z\Big|_{z=-d} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=-d} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=\eta} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{z=\eta} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{z=\eta}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi)\Big|_{z=\eta} + g\eta = 0$$