海洋工程波浪力学

中国海洋大学工程学院海洋工程系
王树青

目 录

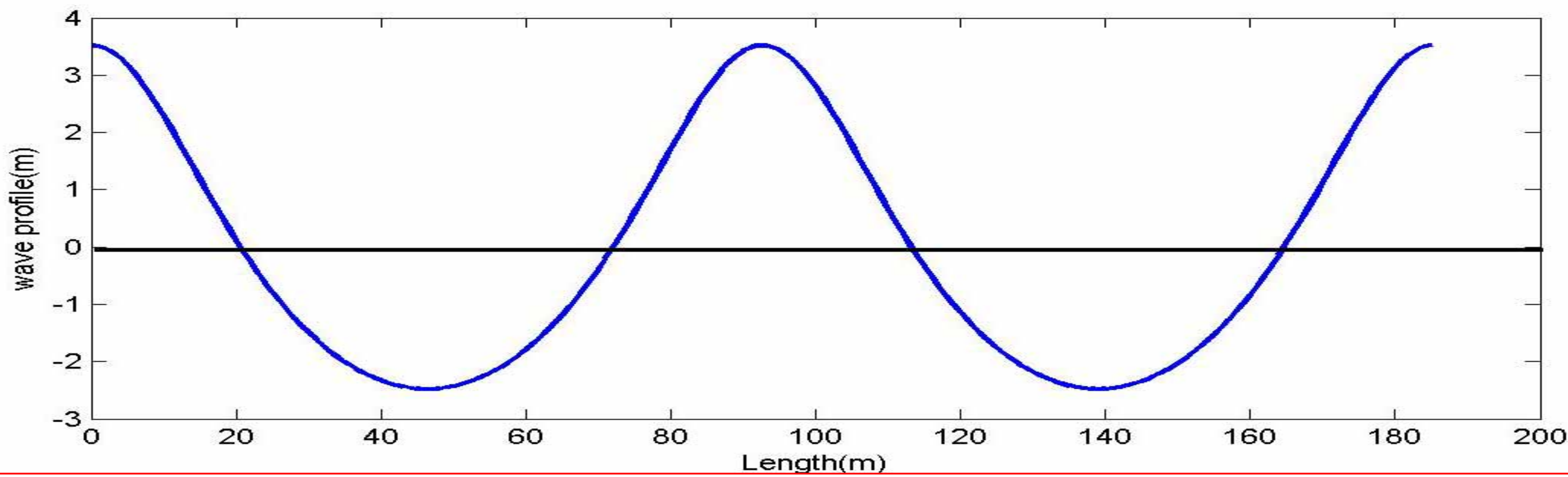
第六章 随机波浪和随机波浪力

- **6.1** 随机波浪及其统计特性
  - **6.1.1** 海浪的复杂性和随机性
  - **6.1.2** 随机函数及其统计特性
  - **6.1.3** 平稳的各态历经的随机过程
  - **6.1.4** 谱密度函数
  - **6.1.5** 海浪要素的统计特性
- **6.2** 随机波浪的谱特性
  - **6.2.1** 频谱
  - **6.2.2** 方向普
- **6.3** 海工结构物上的随机波浪力
  - **6.3.1** 特征波法（设计波法）
  - **6.3.2** 谱分析法

6.1 随机波浪及其统计特性

6.1.1 海浪的复杂性和随机性

特点：单一周期和振幅的简单规则波，可以用确定的函数来表示



Stokes V wave profile

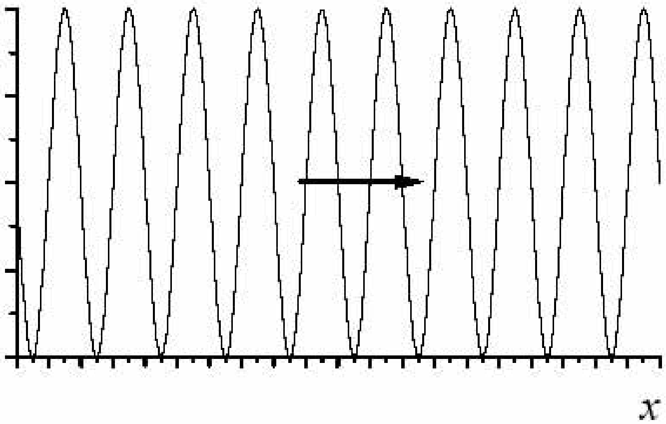
H=6, T=8s, d=20m, L=92.6m

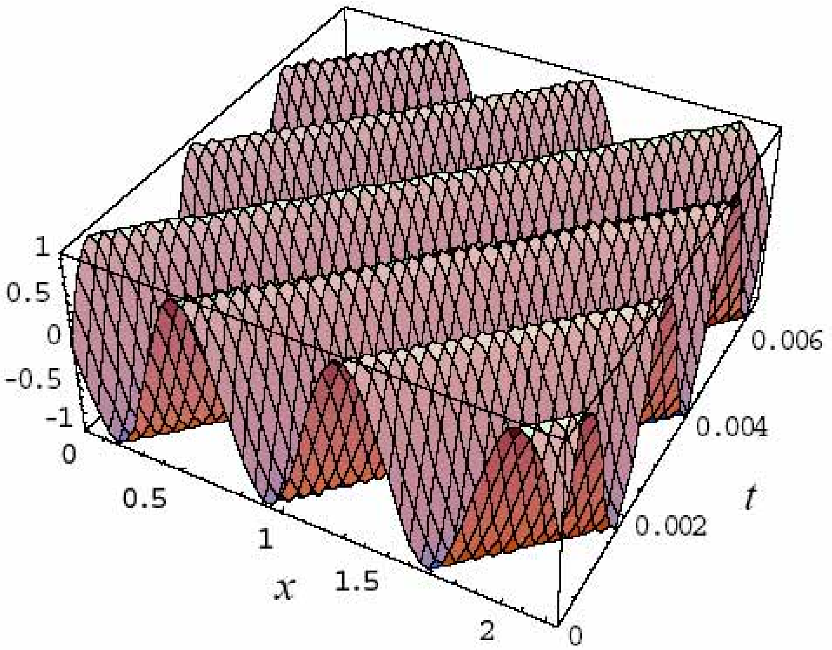
王树青

中国海洋大学海洋工程系

海洋工程波浪力学

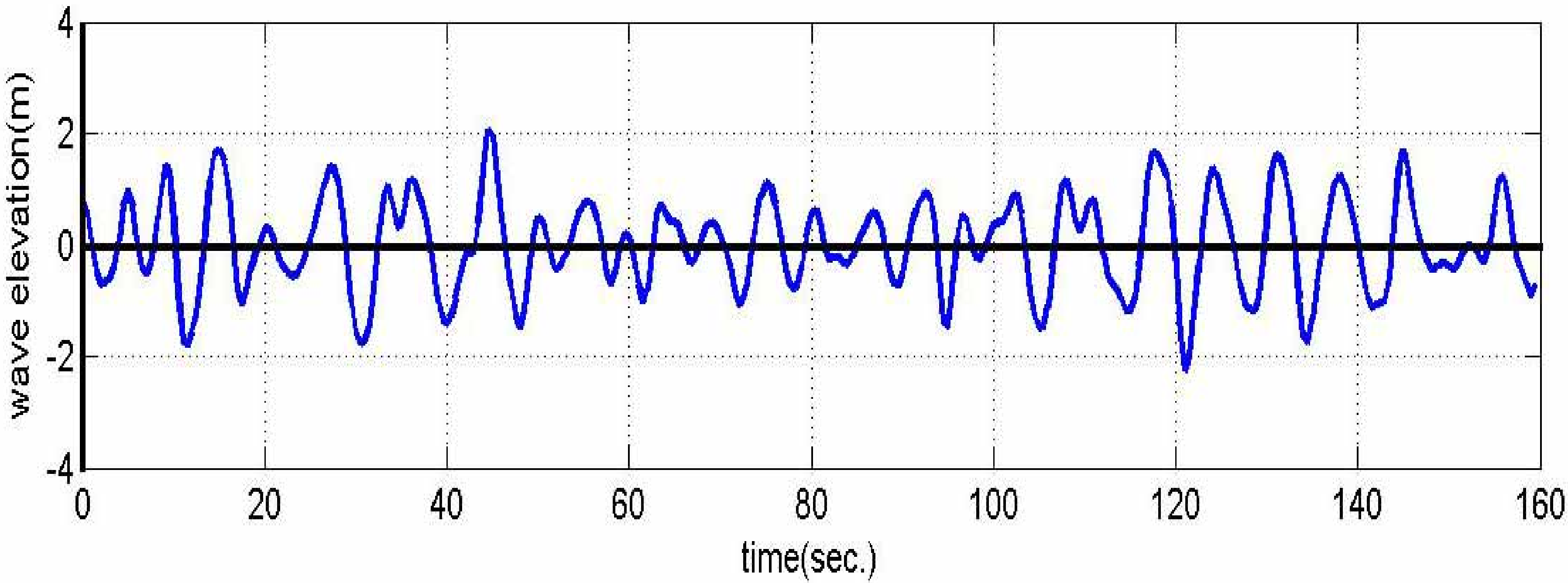
王树青





6.1.1 海浪的复杂性和随机性

定点观测海面波动时间过程：波动是不规则的，且是随机量；



Random wave elevation

H=3, T=8s, P-M Spectrum

王树青

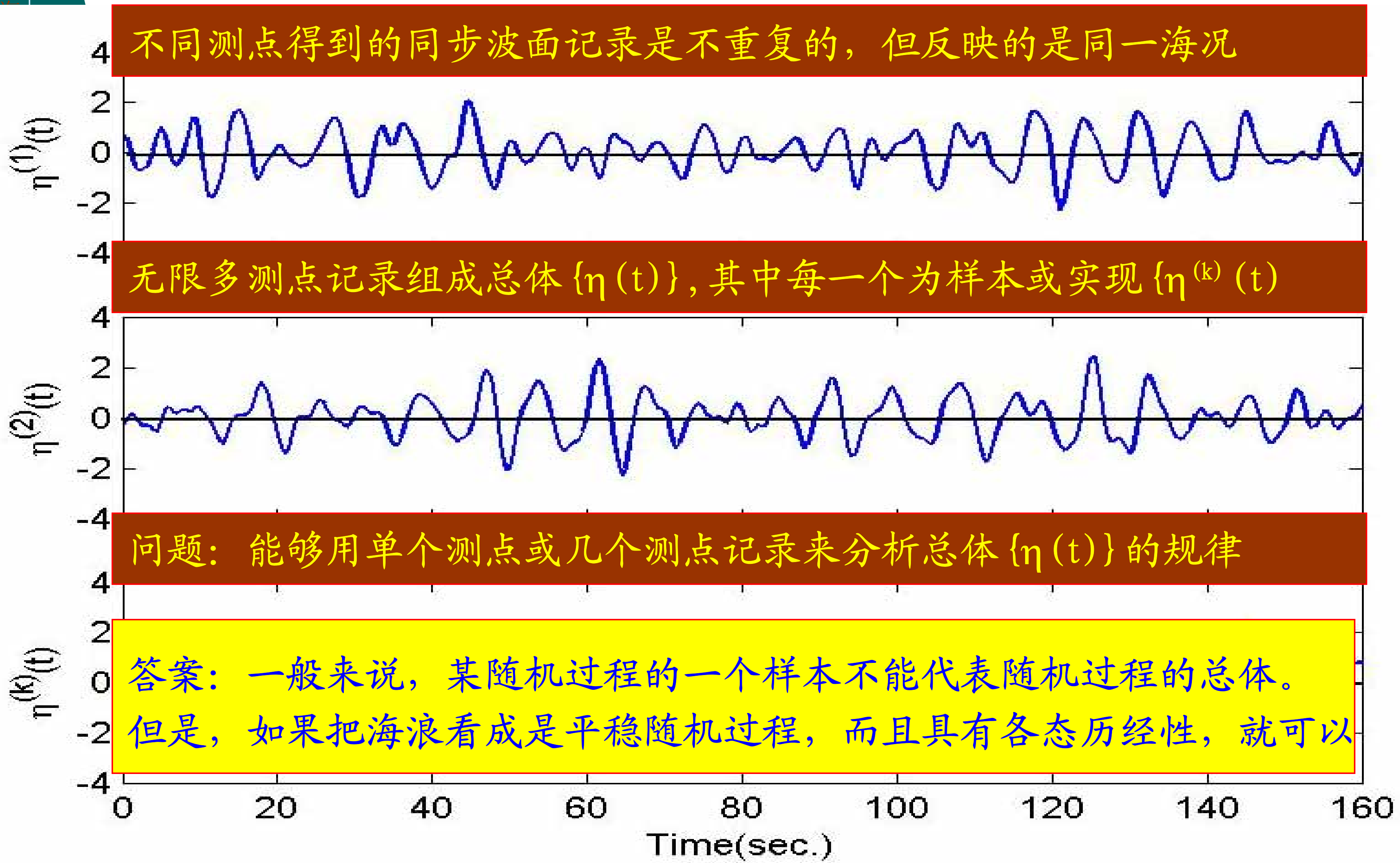
6.1.1 海浪的复杂性和随机性

不同测点得到的同步波面记录是不重复的，但反映的是同一海况

无限多测点记录组成总体{η(t)}，其中每一个为样本或实现{$\eta^{(k)}(t)$}

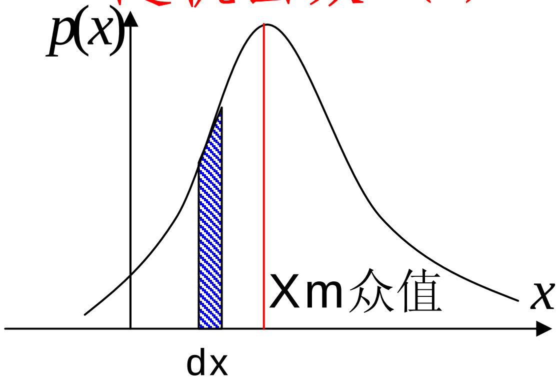
问题：能够用单个测点或几个测点记录来分析总体{η(t)}的规律

答案：一般来说，某随机过程的一个样本不能代表随机过程的总体。但是，如果把海浪看成是平稳随机过程，而且具有各态历经性，就可以



6.1.2 随机函数及其统计特征值

一. 随机函数的概率密度函数和分布函数——随机函数x(t)



❖ 概率密度函数

$$p(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P_{rob}\left[x<x(t)<x+\Delta x\right]}{\Delta x}$$

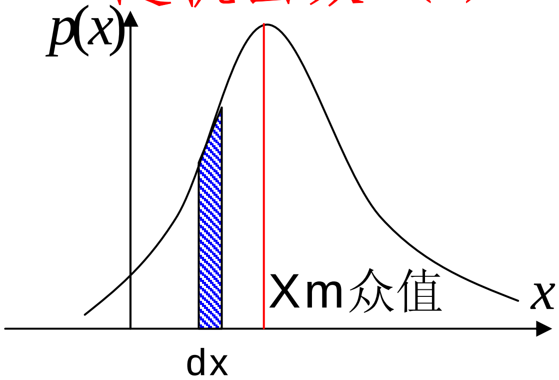
● 概率

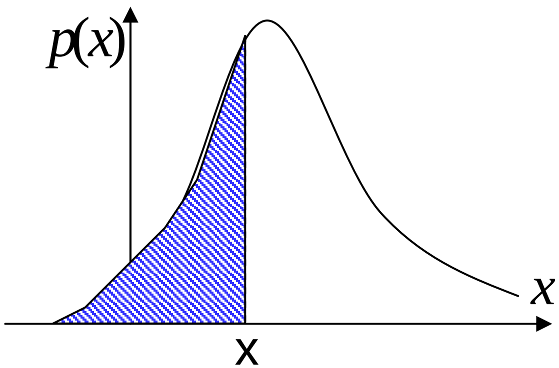
$$P_{rob}\left[x_1<x(t)<x_2\right]=\int_{x_1}^{x_2}p(x)dx$$

$$P_{rob}\left[-\infty<x(t)<\infty\right]=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1$$

6.1.2 随机函数及其统计特征值

一. 随机函数的概率密度函数和分布函数——随机函数x(t)





- 概率密度函数

$$p(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P_{rob}\left[x<x(t)<x+\Delta x\right]}{\Delta x}$$

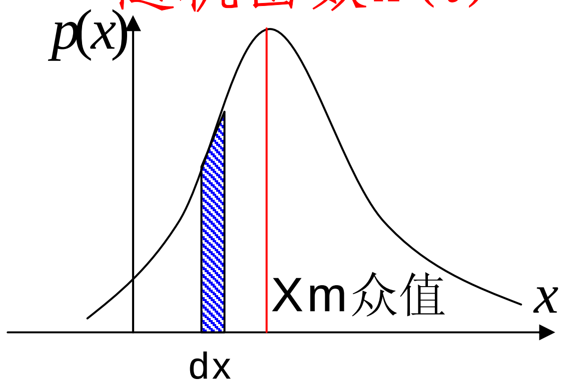
- 概率分布函数

$$P(x)=P_{rob}\left[x(t)\le x\right]=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx$$

- 关系 $\dfrac{dP(x)}{dx}=p(x)$
- 中值：P(x)=0.5对应的x

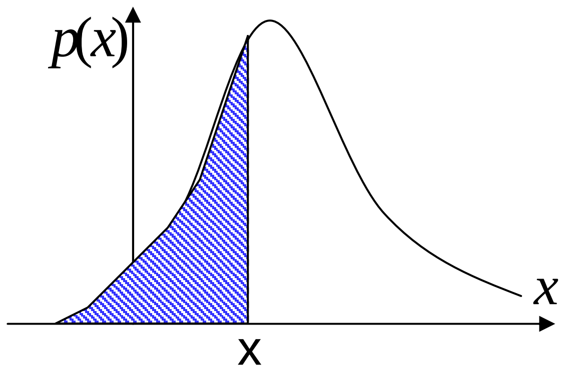
6.1.2 随机函数及其统计特征值

一. 随机函数的概率密度函数和分布函数——随机函数x(t)



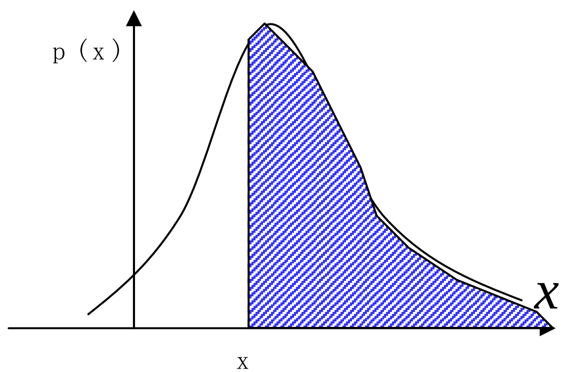
- 概率密度函数

$$p(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P_{rob}\left[x<x(t)<x+\Delta x\right]}{\Delta x}$$



- 概率分布函数

$$P(x)=P_{rob}\left[x(t)\le x\right]=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx$$



- 超值累积概率分布函数

$$F(x)=P_{rob}\left[x(t)\ge x\right]$$

$$=\int_{x}^{\infty}p(x)dx$$

$$=1-P(x)$$

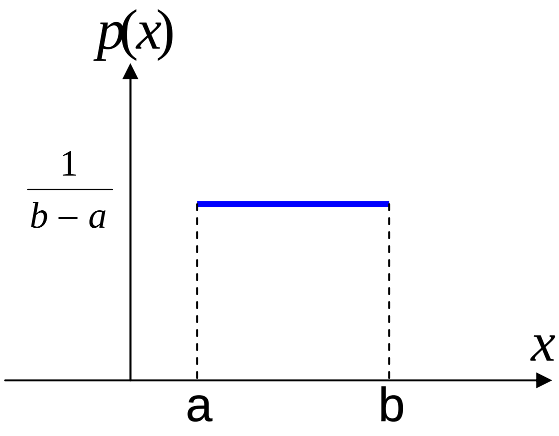
王树青

6.1.2 随机函数及其统计特征值

一. 随机函数的概率密度函数和分布函数——随机函数x(t)

❖ 均匀分布

$$p(x)=c=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & others\end{cases}$$



王树青

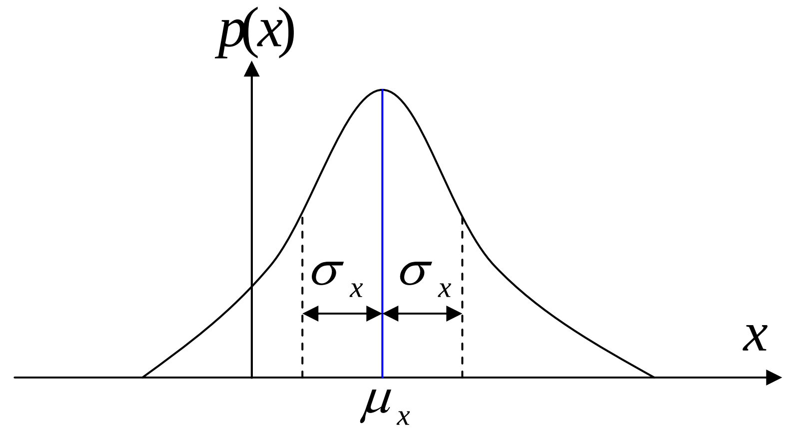
中国海洋大学海洋工程系
海洋工程波浪力学
王树青

6.1.2 随机函数及其统计特征值

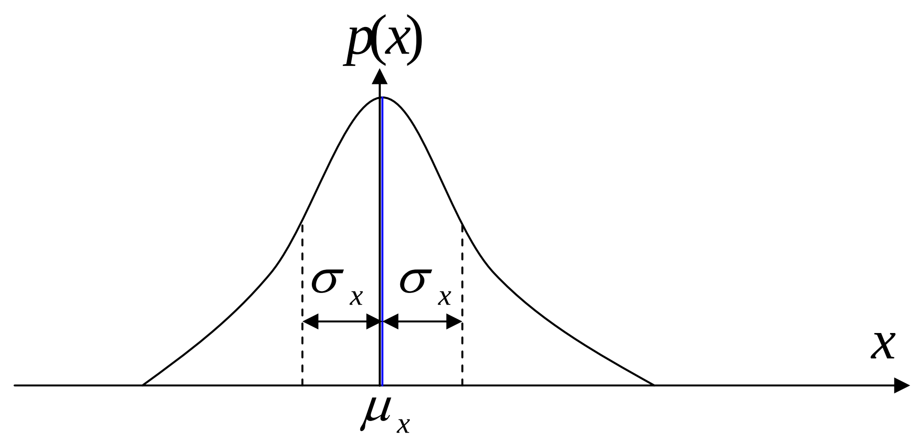
一. 随机函数的概率密度函数和分布函数——随机函数x(t)

❖ 正态分布（高斯分布－Gaussian distribution）

$$p(x) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp \quad \frac{(x \quad \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}$$



$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$



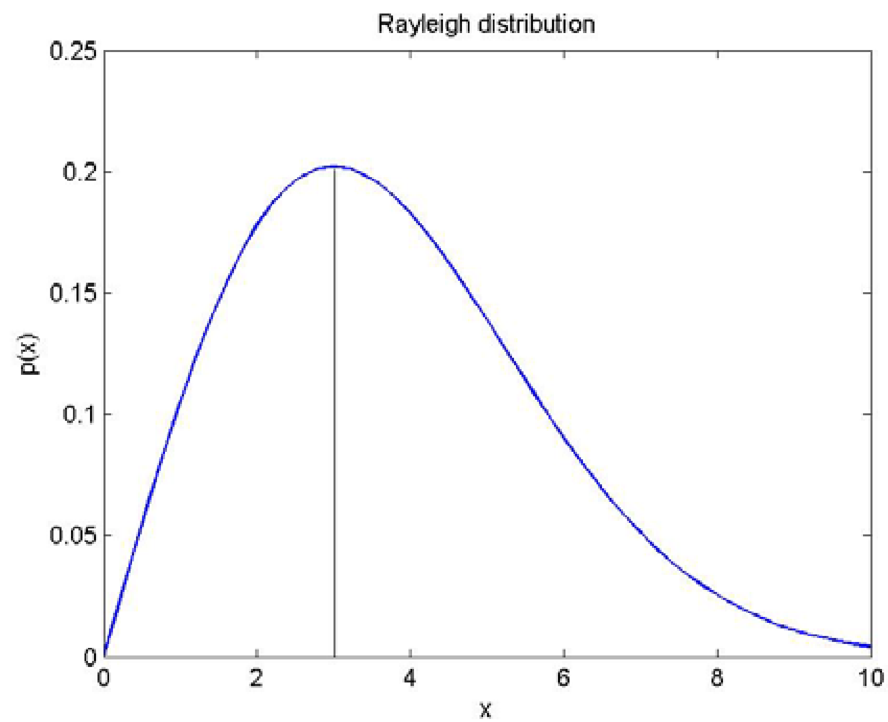
6.1.2 随机函数及其统计特征值

一. 随机函数的概率密度函数和分布函数——随机函数x(t)

❖ 瑞利分布（Rayleigh distribution）

$$p(x)=\frac{\pi x}{2\mu_x^2}\exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{\mu_x}\right)^2\right]$$

$$P(x)=1-\exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{\mu_x}\right)^2\right]$$



Rayleigh distribution with raylpdf(x,b)

中国海洋大学海洋工程系

6.1.2 随机函数及其统计特征值

二. 随机函数的基本特征值——随机函数x(t)

- 数学期望（均值）和均方值

  - 数学期望：x(t)的总体平均值，即一阶原点矩；

$$\mu_x = M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

  - 均方值：x(t)平方的总体平均值，即二阶原点矩；

$$M[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx$$

  - 均方根值：

$$x_{rms} = \sqrt{M[x^2]}$$

王树青

6.1.2 随机函数及其统计特征值

二. 随机函数的基本特征值——随机函数x(t)

- 方差和均方差-离散程度

  - 方差：x(t)对均值的离散程度，即二阶中心矩；

$$D[x]=M[(x-\mu_x)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2p(x)dx=M[x^2]-\mu_x{}^2$$

  - 均方差：$\sigma_x=\sqrt{D[x]}$

  - 离差系数：$C_V=\dfrac{\sigma_x}{\mu_x}$

  - 偏态系数：$C_S=\dfrac{M[(x-\mu_x)^3]}{\left(\sqrt{D[x]}\right)^2}$

王树青

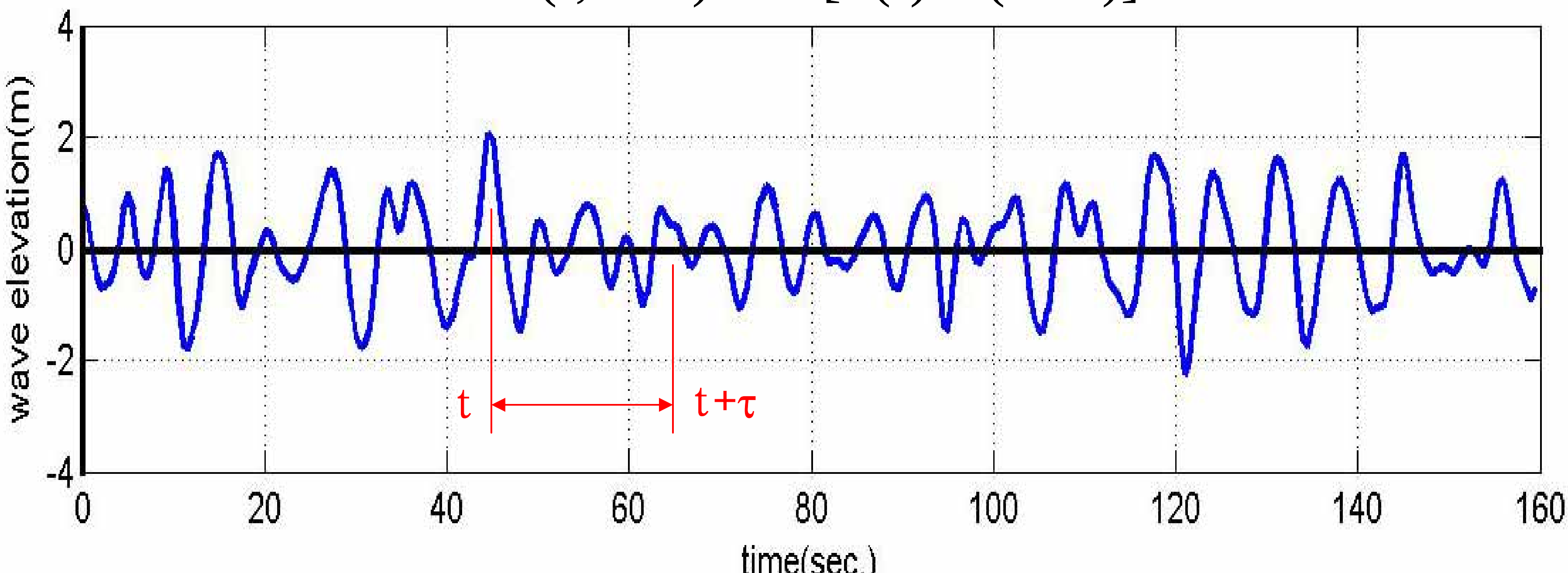
6.1.2 随机函数及其统计特征值

二. 随机函数的基本特征值——随机函数x(t)

❖ 自相关函数

❑ 意义：表示一个时刻t时的x(t)与另一时刻t+τ时的x(t+τ)的相关关系；定义为乘积的数学期望

$$R(t,t+\tau)=M[x(t)\cdot x(t+\tau)]$$



τ很小， **x(t)**与**x(t+τ)**关系密切；

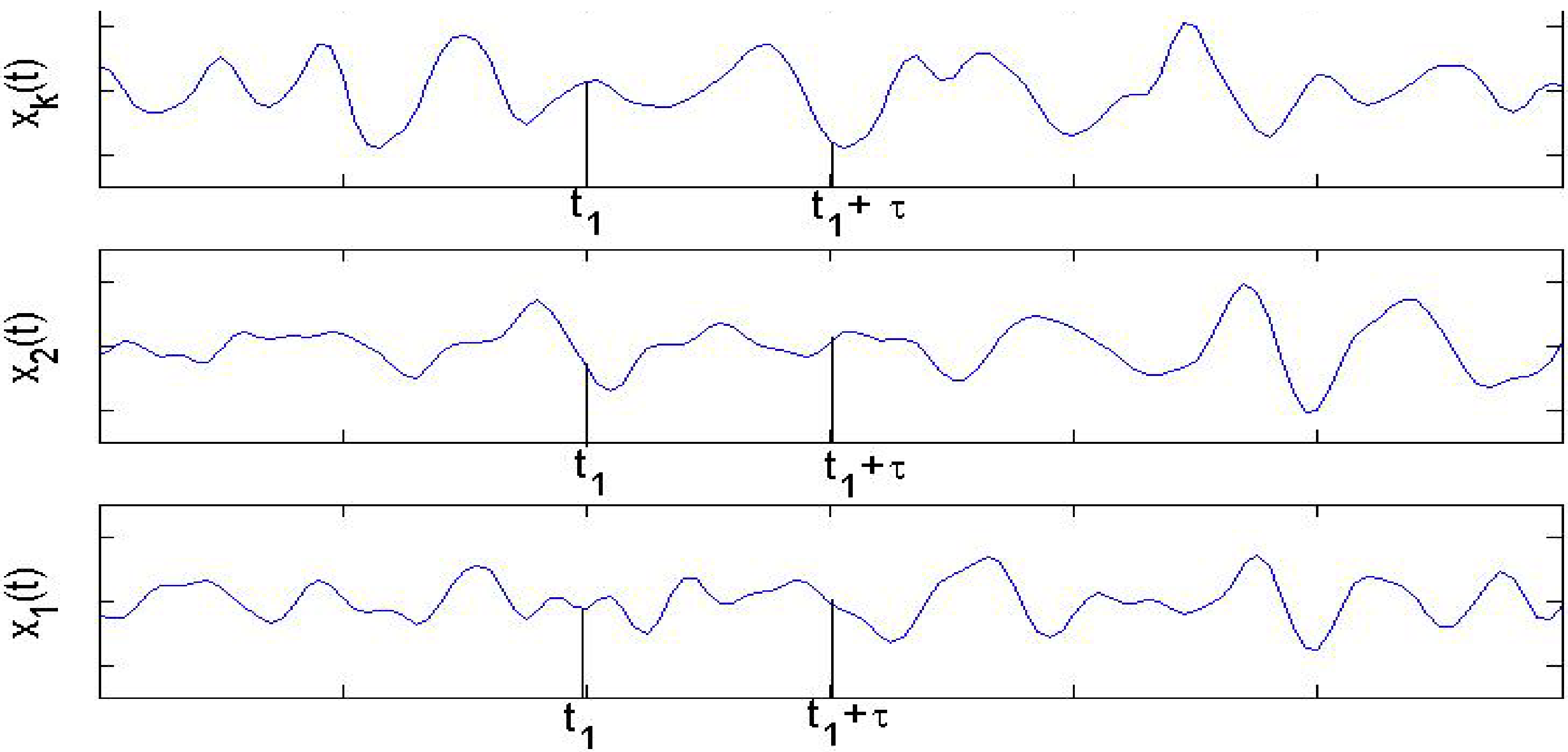
6.1.3平稳的具有各态历经的随机过程

一. 平稳的随机过程

- 总体x (t) 在任何时间的特征值可以用样本函数的总体平均表示;

$$M[x(t_1)] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1) \qquad R(t_1, t_1+\tau) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)\cdot x_k(t_1+\tau)$$

- 一般来说，总体平均随时间t_1的变化而变化——非平稳随机过程;

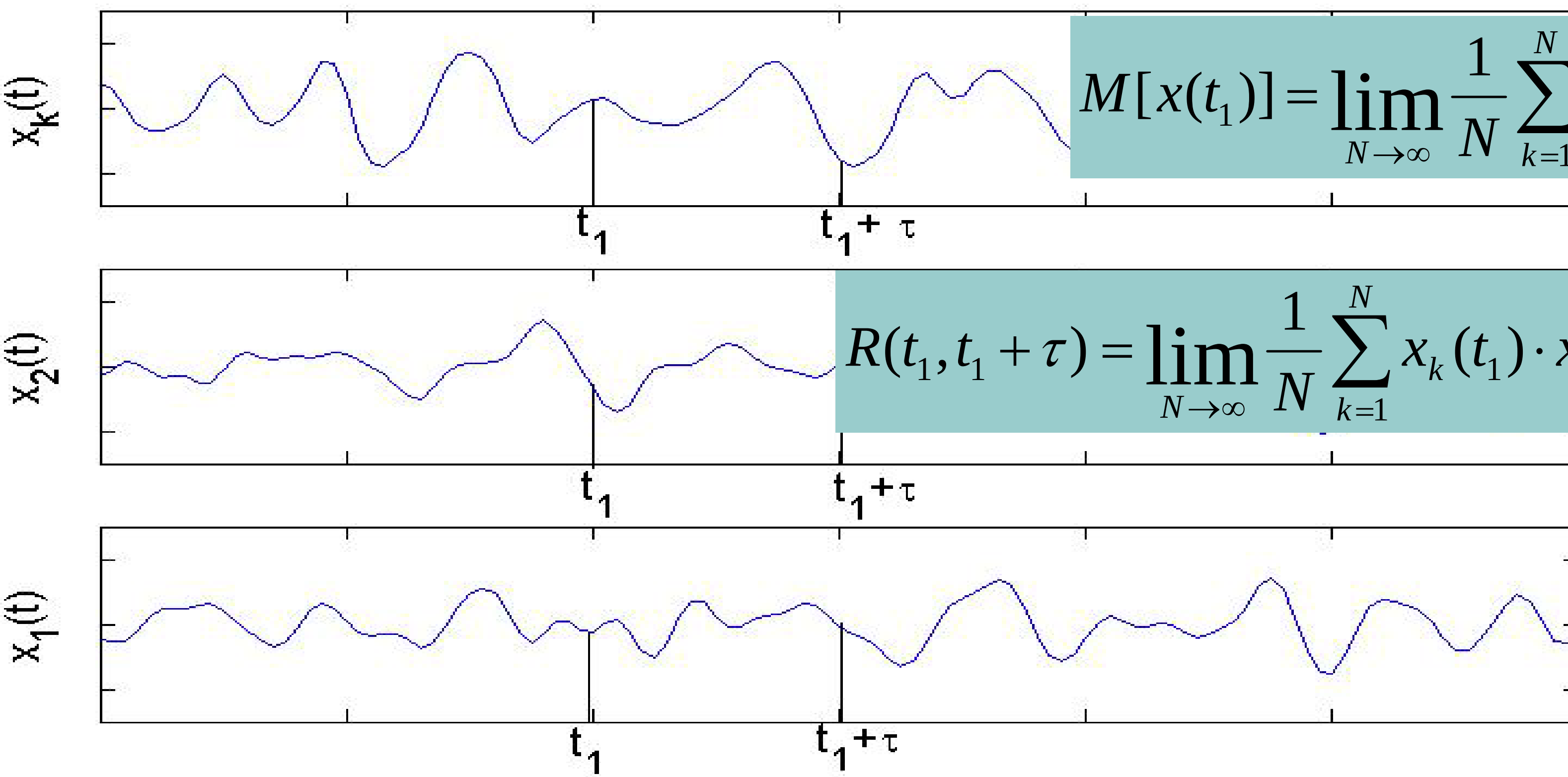


6.1.3平稳的具有各态历经的随机过程

一. 平稳的随机过程

- 弱平稳随机过程：M[x(t₁)]和R(t₁, t₁+τ)不随时间**t1**改变；

$$M[x(t_1)] = M[x(t)] \qquad R(t_1, t_1+\tau) = R(\tau)$$



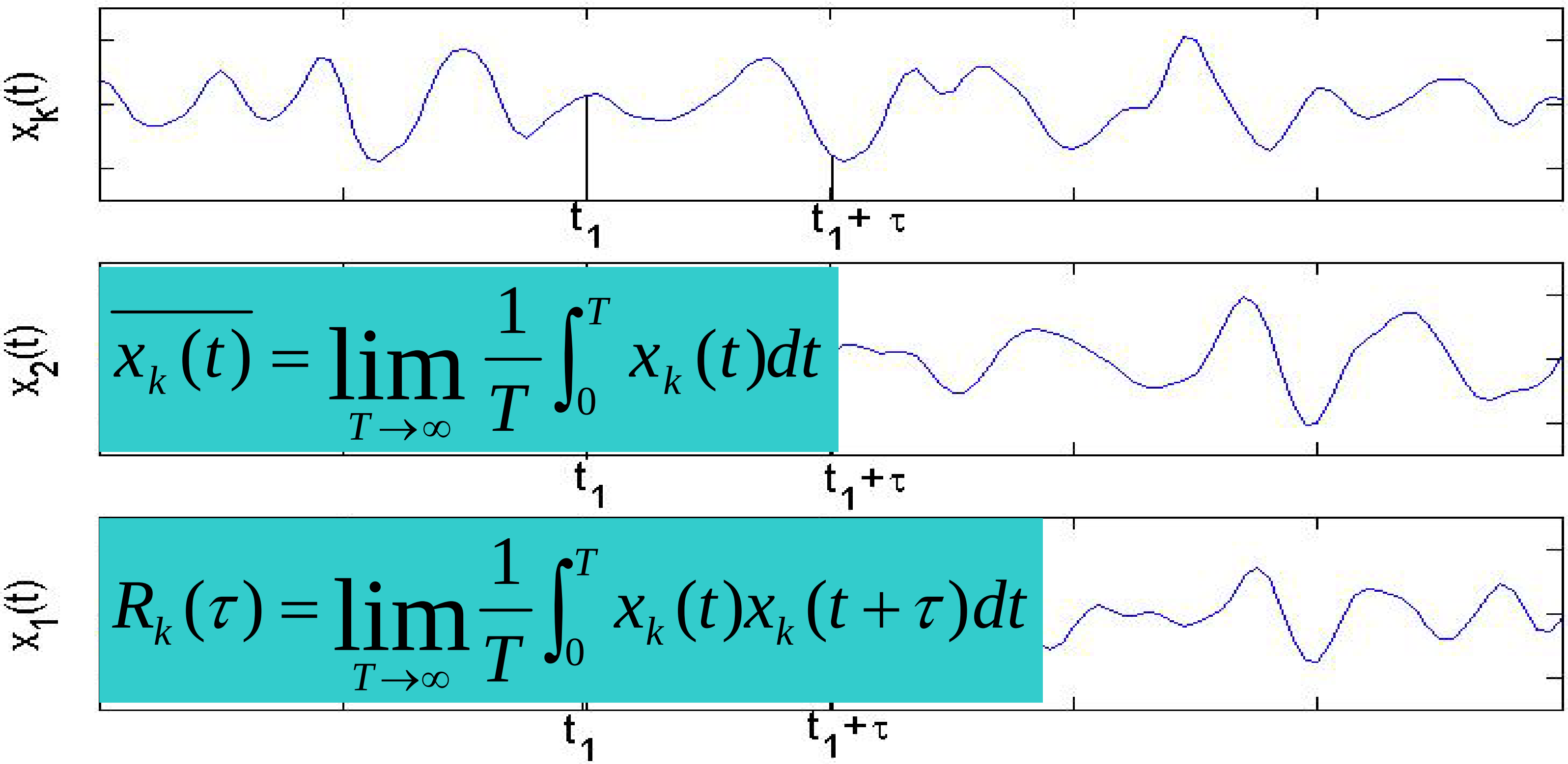
$$M[x(t_1)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)$$

$$R(t_1, t_1+\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)\cdot x_k(t_1+\tau)$$

6.1.3平稳的具有各态历经的随机过程

二. 各态历经的随机过程

- 用具体时刻的总体平均来确定随机过程的特性!
- 问题：能否用样本函数的时间平均来确定平稳随机过程的特性;



$$\overline{x_k(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)dt$$

$$R_k(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)x_k(t+\tau)dt$$

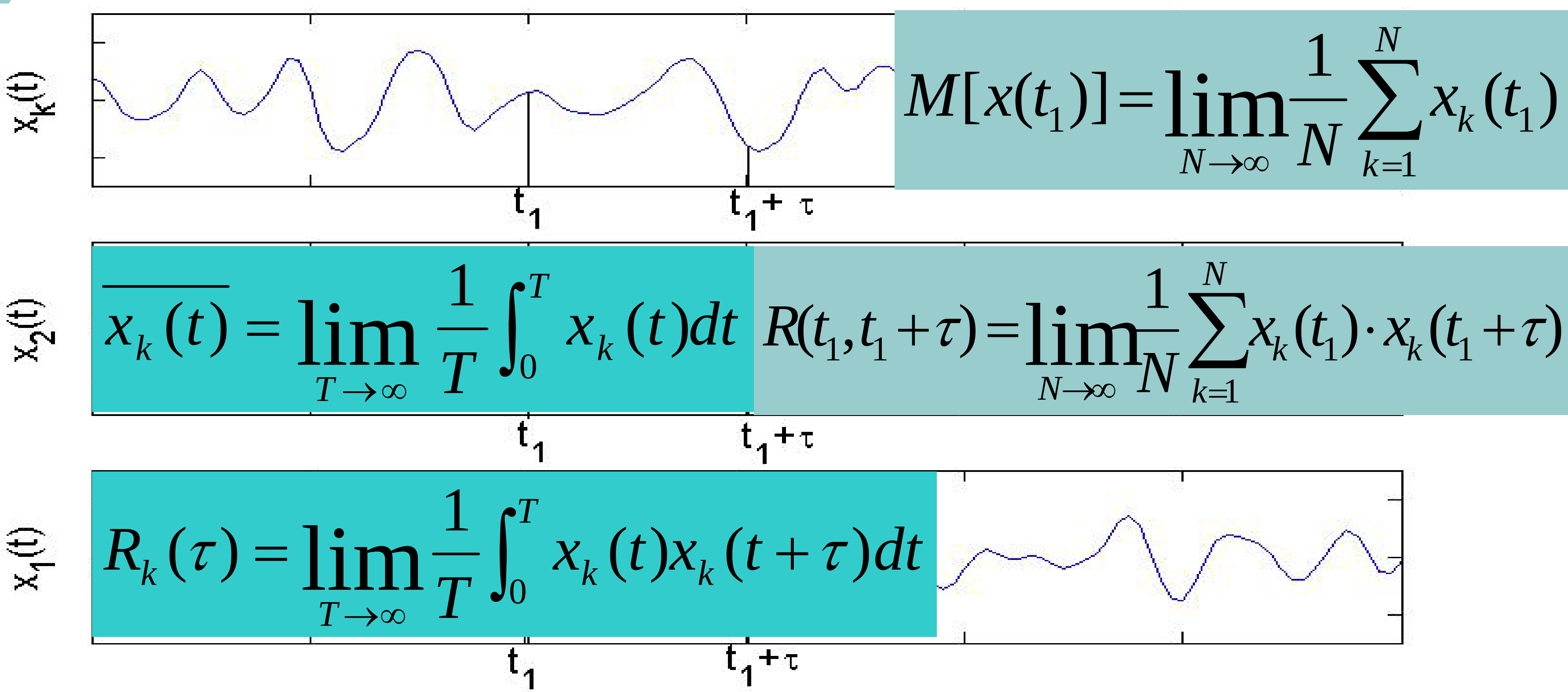
中国海洋大学海洋工程系

6.1.3平稳的具有各态历经的随机过程

二. 各态历经的随机过程

- 各态历经：时间平均的统计值 = 总体平均的统计值；

$$\overline{x(t_k)} = M[x(t)] \qquad R_k(\tau) = R(\tau)$$



$$M[x(t_1)] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k(t_1)$$

$$\overline{x_k(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)dt$$

$$R(t_1, t_1+\tau) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k(t_1)\cdot x_k(t_1+\tau)$$

$$R_k(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)x_k(t+\tau)dt$$

海洋工程波浪力学

王树青

6.1.3平稳的具有各态历经的随机过程

二. 各态历经的随机过程

- 注意:

（1）只有平稳过程才可能是各态历经的;

（2）各态历经的充要条件: $\tau\to\infty$, $R(\tau)=0$

- 说明——对平稳各态历经的随机过程:

（1）若平稳过程具有各态历经性，则可以取一个样本代替总体; 总体的特性可以用样本的时间平均描述;

（2）平稳随机过程的统计特性与时间起点无关，因此对一个给定的样本函数，可以从任一时刻开始统计，不影响统计结果。

王树青

6.1.4 谱密度函数

一. 谱密度函数

- 傅立叶积分公式 $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\exp(-i\omega t)dt]\exp(i\omega t)d\omega$

- 傅立叶变换 $G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\exp(-i\omega t)dt$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\exp(i\omega t)d\omega$$

- 均值为0的平稳随机过程x(t)的均方值

$$\overline{x^2(t)}=\sigma_x^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cdot x(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}|G(\omega)|^2\right)d\omega$$

- 定义S(ω) $S(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi T}|G(\omega)|^2$

$$\overline{x^2(t)}=\sigma_x^2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)d\omega$$

王树青

6.1.4 谱密度函数

一. 谱密度函数

- 能量谱密度函数（谱密度函数或谱密度）

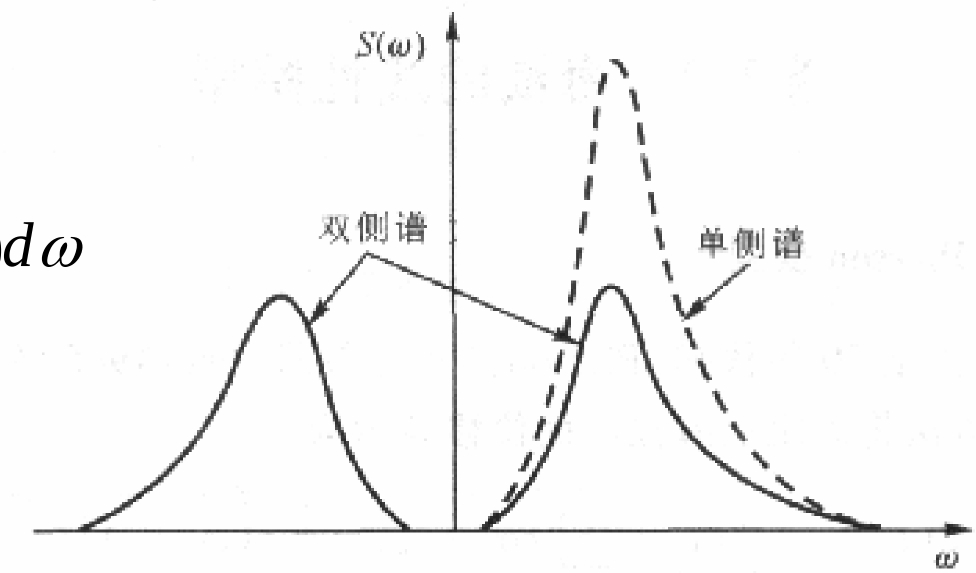
$$\overline{x^2(t)} = \sigma_x^2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega$$

左端：随机过程x(t)的平均能量；
右端：被积函数为x(t)能量谱密度函数；

- S(ω) 为偶函数——双侧谱密度

- S(ω)——单侧谱密度

$$\overline{x^2(t)} = \sigma_x^2 = \int_0^{\infty} S(\omega)d\omega$$



6.1.4 谱密度函数

二. 自相关函数与谱密度函数的关系

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\exp(i\omega\tau)d\omega$$

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau$$

$$R(\tau)=2\int_{0}^{\infty}S(\omega)\exp(i\omega\tau)d\omega$$

$$S(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}R(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau$$

$$R(\tau)=2\int_{0}^{\infty}S(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega$$

$$S(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}R(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau$$

王树青

6.1.4 谱密度函数

二. 自相关函数与谱密度函数的关系

- 谱的各阶矩

$$m_0 = \int_0^\infty S(\omega) d\omega$$

$$m_2 = \int_0^\infty \omega^2 S(\omega) d\omega$$

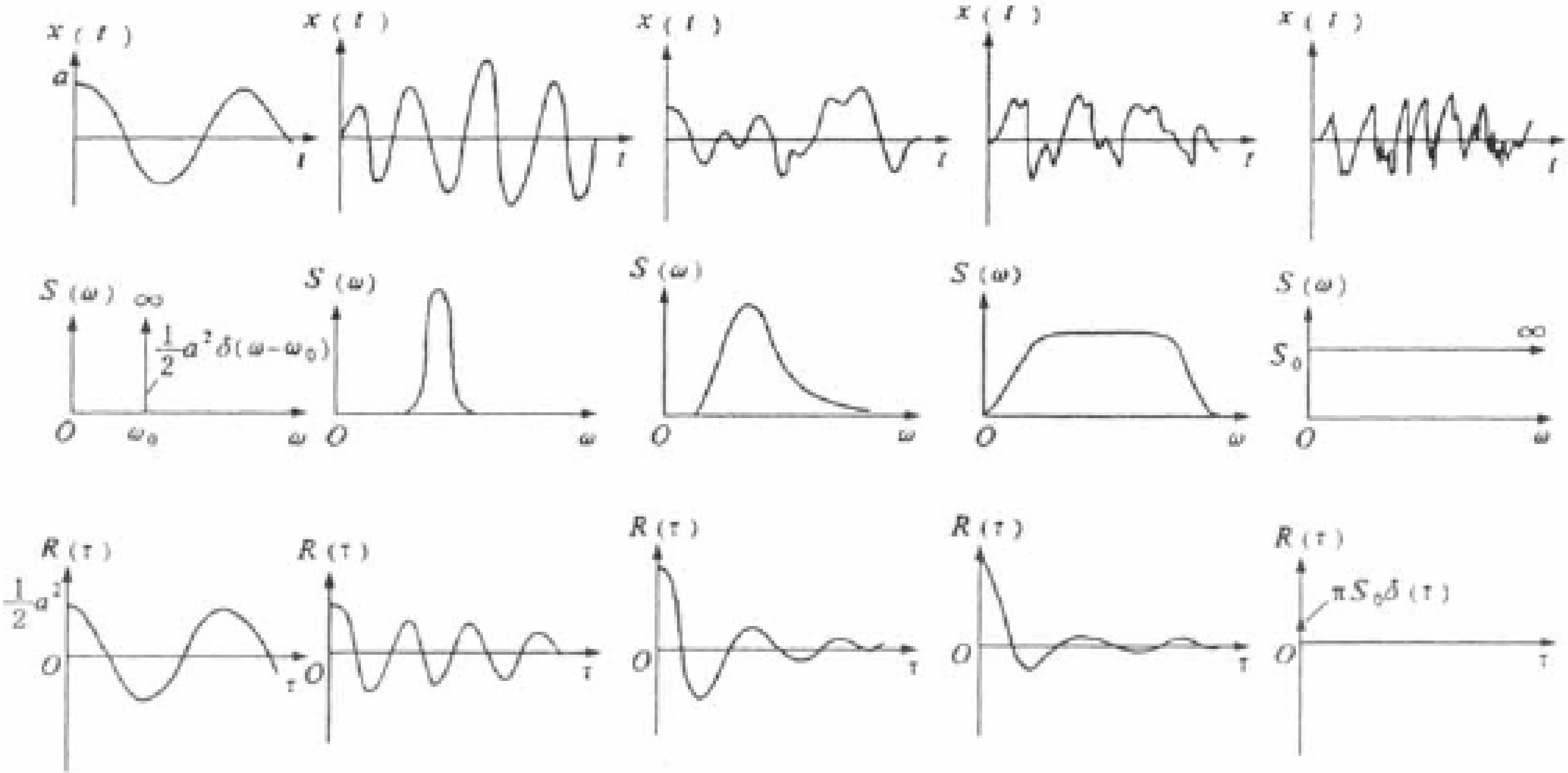
$$m_k = \int_0^\infty \omega^k S(\omega) d\omega$$

王树青

6.1.4 谱密度函数

三. 宽带过程和窄带过程

- 谱的窄宽反映的是随机现象能量集中程度如何?



a)余弦波 b)窄带谱过程 c)波浪 d)宽带谱过程 e)白噪声

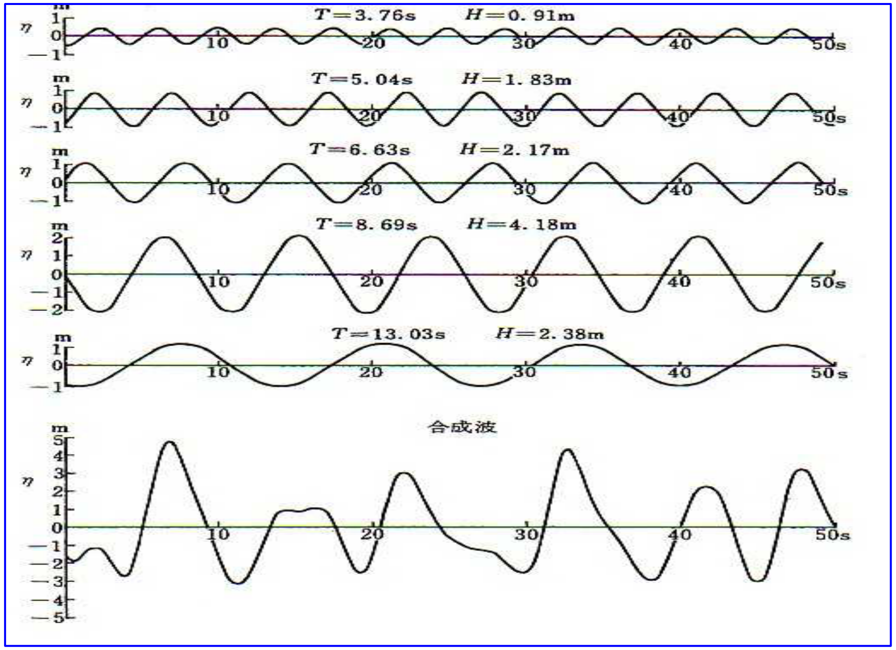
6.1.5 海浪要素的统计特征

- 海浪是否具有平稳性和各态历经性?

  - 理论和实验结果：海浪视为是无限多个随机的简单余弦波迭加的结果。－－－均值不随时间变化。

  - 波面方差同波浪单位面积铅直水柱的波浪势能成比例。对稳定阶段的波浪，其能量的变化一般很小，即波面方差变化较小，视为准平稳过程。（要求：观测记录10－30min）。

  - 自相关函数R(τ)：τ→∞，R(τ)=0.



中国海洋大学海洋工程系

王树青

6.1.5 海浪要素的统计特征

一. 波面高度的分布

- 平稳海况下的海浪视为平稳的各态历经的随机过程，波动可以认为是无限多个振幅不等、频率不等、初相位随机，并沿与x轴成不同角度的方向传播的简单余弦波的叠加;

- Longuet－Higgins海浪模型

$$\eta(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(k_n x\cos\theta_n+k_n y\sin\theta_n-\omega_n t-\varepsilon_n)$$

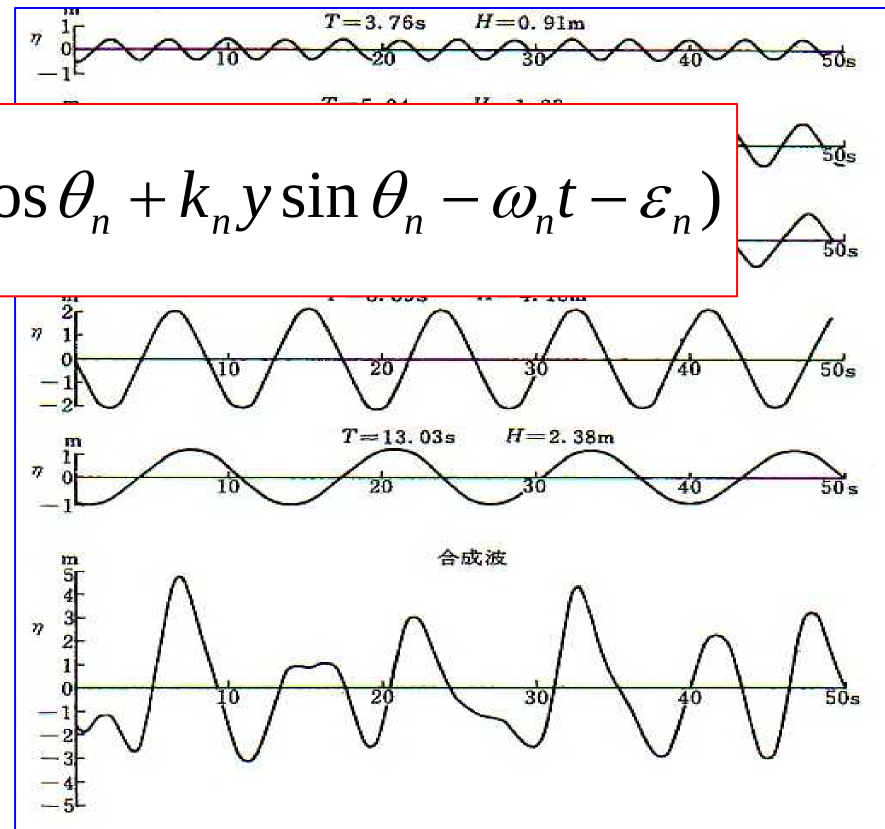
a_n---单个组成波的振幅;

ω_n---单个组成波的频率;

k_n ---单个组成波的波数;

θ_n---传播方向角度(0-2π);

ε_n---初相位， (0-2π)之间均匀分布，是随机量;



6.1.5 海浪要素的统计特征

一. 波面高度的分布

- Longuet－Higgins海浪模型

$$\eta(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(k_n x\cos\theta_n+k_n y\sin\theta_n-\omega_n t-\varepsilon_n)$$

- 某固定点（x=y=0)的波面高度

$$\eta(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\omega_n t+\varepsilon_n)$$

- 平稳海况下的波面高度符合高斯分布

$$p(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma_\eta^2}\right)$$

实测和实验验证见图6.12和6.13

6.1.5 海浪要素的统计特征

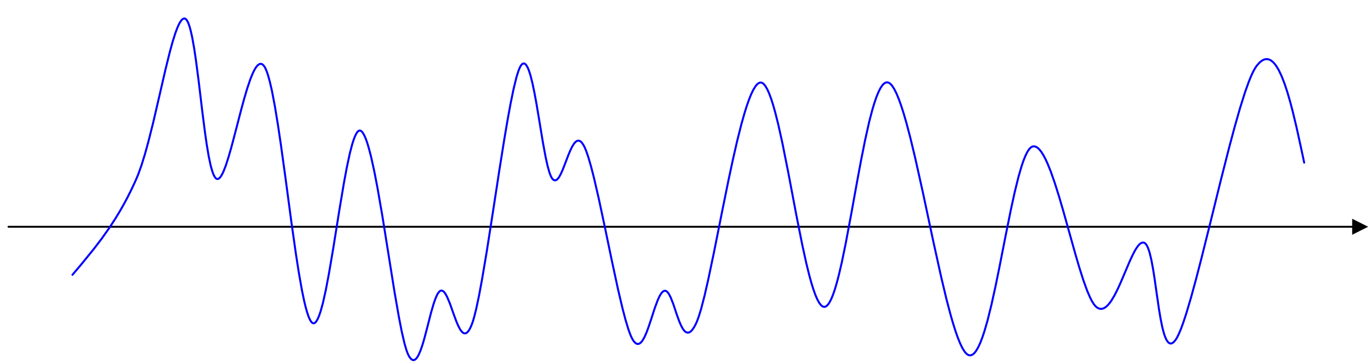
二. 波面极大值的分布

- 波面极值、极大值、极小值;
- Cartwright, Longuet-Higgins研究波面极极大概率分布;
- 基本思路——研究联合概率分布（6.59）;

$$p(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\varepsilon\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{\varepsilon^2}\right)+\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot\xi\exp\left(\frac{1}{2}\xi^2\right)\int\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx\right]$$

$$\xi=\frac{\eta(t)}{\sqrt{m_0}}\qquad \varepsilon=\frac{m_0m_4-m_2^{\,2}}{m_0m_4}$$

ε---谱宽参数



6.1.5 海浪要素的统计特征

二. 波面极大值的分布

- ε→0，为瑞利分布

$$p(\xi)=\xi\exp\left(\frac{1}{2}\xi^{2}\right)$$

- ε→1，为正态分布

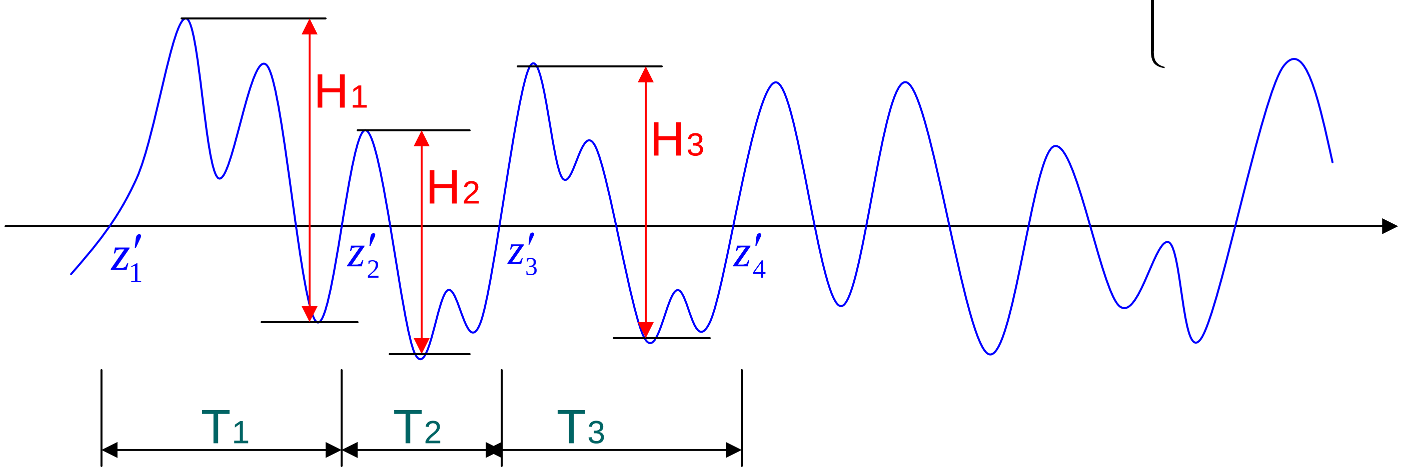
$$p(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{1}{2}\xi^{2}\right)$$

6.1.5 海浪要素的统计特征

三. 波高的分布

- 波高的定义——上跨零点法
- Longuet-Higgins推导波高分布为瑞利分布（对窄带过程）

$$p(H)=2\alpha_2\frac{H}{H_0{}^2}\exp\left(-\alpha_2\left(\frac{H}{H_0}\right)^2\right)\qquad \alpha_2=\begin{cases}\dfrac{1}{8} & H_0=\sigma_\eta\\ \dfrac{\pi}{4} & H_0=\overline{H}\\ 1 & H_0=H_{rms}\end{cases}$$



中国海洋大学海洋工程系

海洋工程波浪力学

王树青

6.1.5 海浪要素的统计特征

三. 波高的分布

- 常用平均波高作为参变量

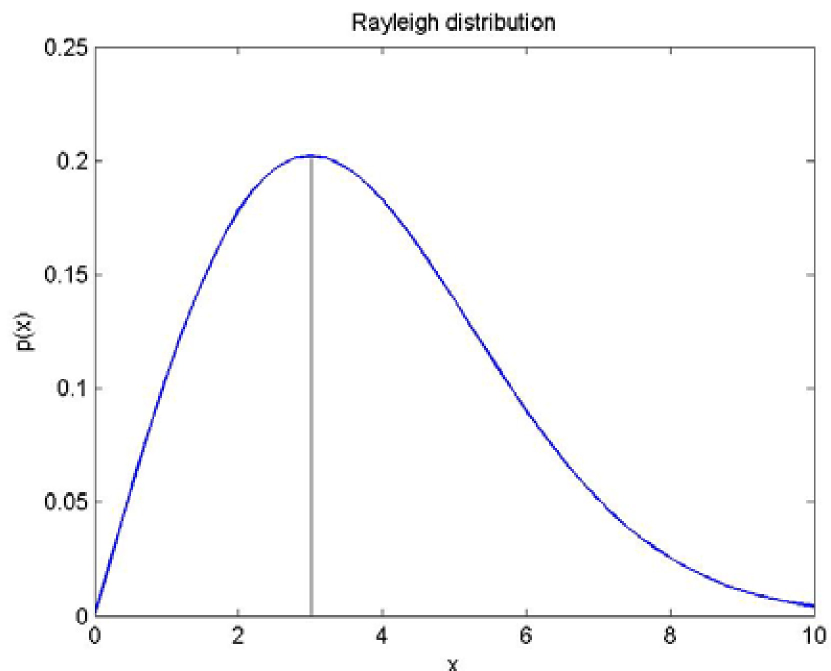
$$p(H)=\frac{\pi}{2}\frac{H}{\overline{H}^2}\exp\left(-\frac{\pi}{4}\frac{H^2}{\overline{H}^2}\right)$$

- 超值累积概率

$$F(H)=P(H\geq H_F)=\int_{H_F}^{\infty}p(H)dH=\exp\left(-\frac{\pi}{4}\frac{H^2}{\overline{H}^2}\right)$$

- 众值（最可能出现的波高）

$$H_m=\sqrt{2/\pi}\,\overline{H}\approx 0.8\overline{H}$$



中国海洋大学海洋工程系
海洋工程波浪力学
王树青

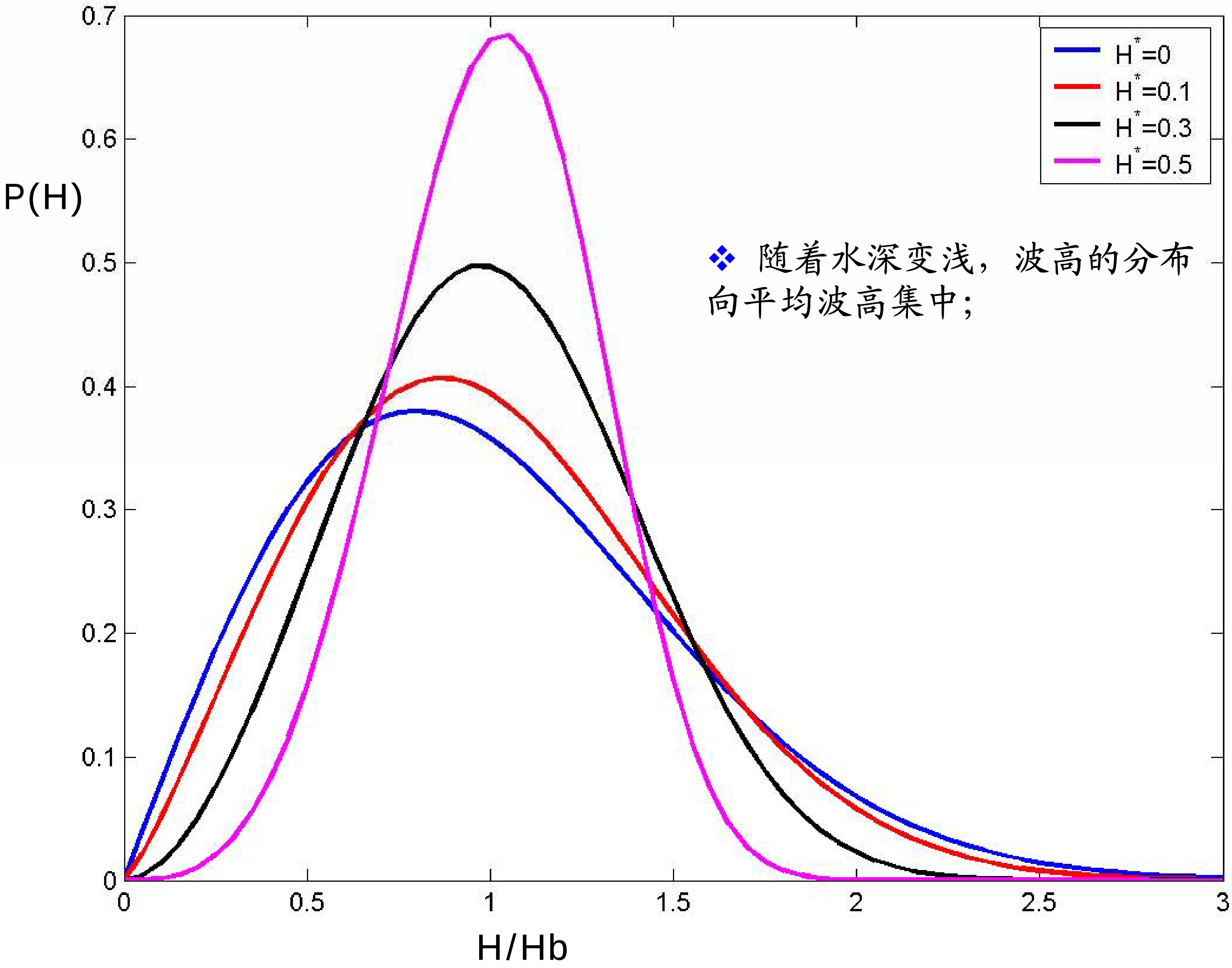
6.1.5 海浪要素的统计特征

三. 波高的分布

- 浅水情况

$$F(H) = P(H \geq H_F) = \exp\left[-\frac{\pi}{4\left(1+\frac{H^*}{\sqrt{2\pi}}\right)}\left(\frac{H}{H^*}\right)^{2/(1-H^*)}\right]$$

$$p(H) = \frac{\pi}{2\overline{H}(1-H^*)\left(1+\frac{H^*}{\sqrt{2\pi}}\right)}\left(\frac{H}{\overline{H}}\right)^{\frac{1+H^*}{1-H^*}}\exp\left[\frac{\pi}{4\left(1+\frac{H^*}{\sqrt{2\pi}}\right)}\left(\frac{H}{H^*}\right)^{2/(1-H^*)}\right]$$



❖ 随着水深变浅，波高的分布向平均波高集中;

中国海洋大学海洋工程系

6.1.5 海浪要素的统计特征

三. 波高的分布

- 波高的特征值

$$\overline{H}=\int_0^{\infty}Hp(H)dH=\sqrt{2\pi}\sigma_\eta$$

$$H^2{}_{rms}=\int_0^{\infty}H^2p(H)dH=8\sigma_\eta{}^2$$

王树青

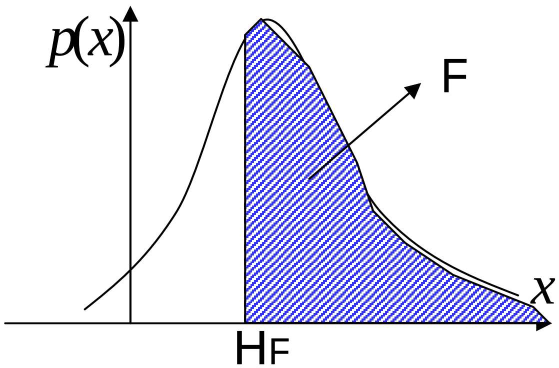
6.1.5 海浪要素的统计特征

三. 波高的分布

- 波列累积概率波高H_F——即累积概率F%对应的波高H_F

$$F(H)=P(H\geq H_F)=\int_{H_F}^{\infty}p(H)dH=\exp\left(-\frac{\pi}{4}\frac{H^2}{\overline{H}^2}\right)$$

$$\frac{H_F}{\overline{H}}=\left(\frac{4}{\pi}\ln\frac{1}{F}\right)^{1/2}$$



- $H_{1\%}$——表示在波列中大于等于该波高的出现概率为1%

王树青

6.1.5 海浪要素的统计特征

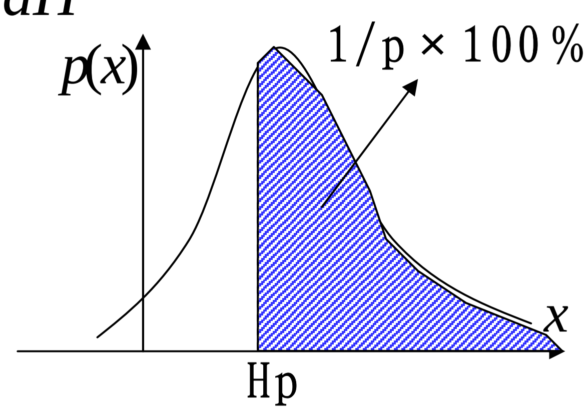
三. 波高的分布

- 部分大波平均波高H_p

❖ 为求1/p大波平均波高$H_{1/p}$，先要确定累积率为$1/p\times100\%$的波高，以Hp表示；

$$\frac{H_F}{\overline{H}}=\left(\frac{4}{\pi}\ln\frac{1}{F}\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{H_p}{\overline{H}}=\left(\frac{4}{\pi}\ln p\right)^{1/2}$$

$$H_{\frac{1}{p}}=\frac{\int_{H_p}^{\infty}Hp(H)dH}{\int_{H_p}^{\infty}p(H)dH}=p\int_{H_p}^{\infty}Hp(H)dH$$



6.1.5 海浪要素的统计特征

三. 波高的分布

- 有效波高——即P=1/3对应的波高（1/3大波平均波高）

$$H_s = H_{1/3} = H_{13.5\%}$$

$$H_{1/10} = H_{3.9\%}$$

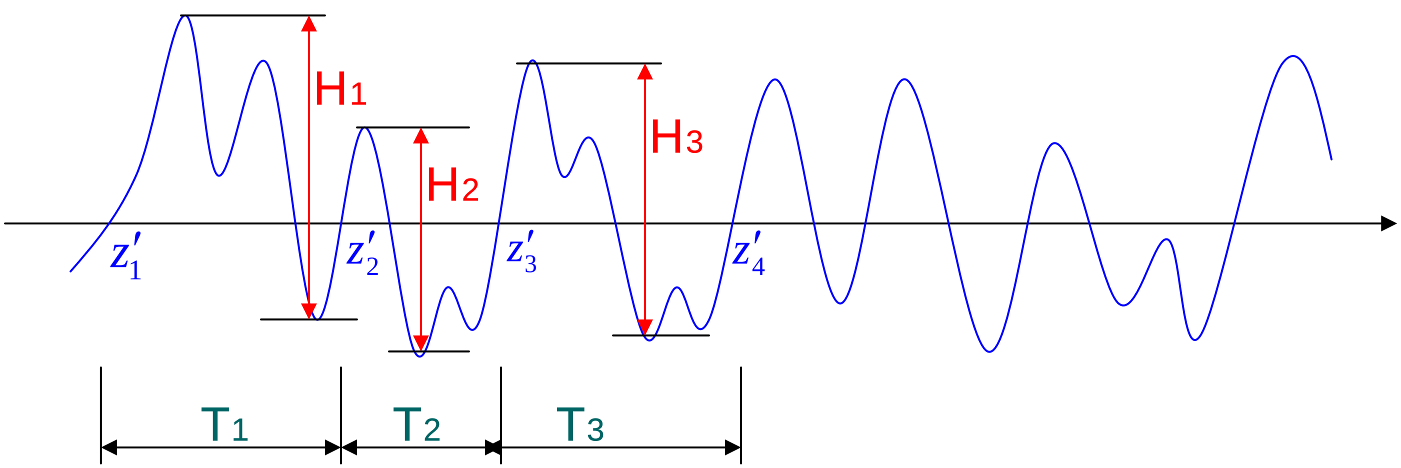
$$H_{1/100} = H_{0.4\%}$$

6.1.5 海浪要素的统计特征

四. 波浪周期的分布

- 平均周期

$$\bar{T} = T_{0,2} = 2\pi\left(\frac{m_0}{m_2}\right)^{1/2}$$



王树青

6.1.5 海浪要素的统计特征

四. 波浪周期的分布

- 周期的理论分布
  - Longuet-Higgins
- 周期与波长的半理论、半经验分布
  - 1959，Bretschneider

$$p(L)=\frac{\pi}{2}\frac{L}{\overline{L}^2}\exp\left(-\frac{\pi}{4}\left(\frac{L}{\overline{L}}\right)^2\right)$$

$$p(T)=4\Gamma^4\left(\frac{5}{4}\right)\frac{T^3}{\overline{T}^4}\exp\left(-\Gamma^4\left(\frac{5}{4}\right)\frac{T^4}{\overline{T}^4}\right)$$

6.2 随机波浪的谱特性

- 研究海浪，可以从两方面入手：
  - 外在表现：概率分布
  - 内部结构：谱特性－－－谱分析

频谱：海浪能量相对于波浪频率的分布；
方向普：海浪能量相对于波浪频率和传播方向的分布；

谱分析：阐明海浪的能量相对于波浪频率。传播方向或其他独立变量的分布规律，建立其函数关系。

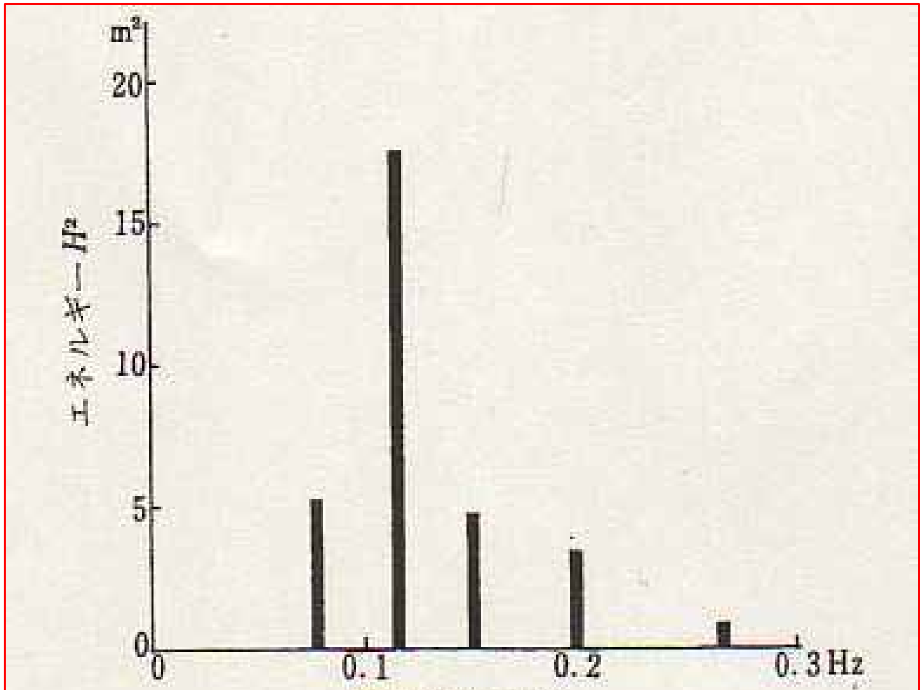
海浪是一种复杂的随机过程。50年代初皮尔生(Pierson)最先将瑞斯(Rice)关于无线电噪声理论应用于海浪，从而以谱的形式用随机过程来描述海浪成为主要的研究途径。

6.2.1 频谱

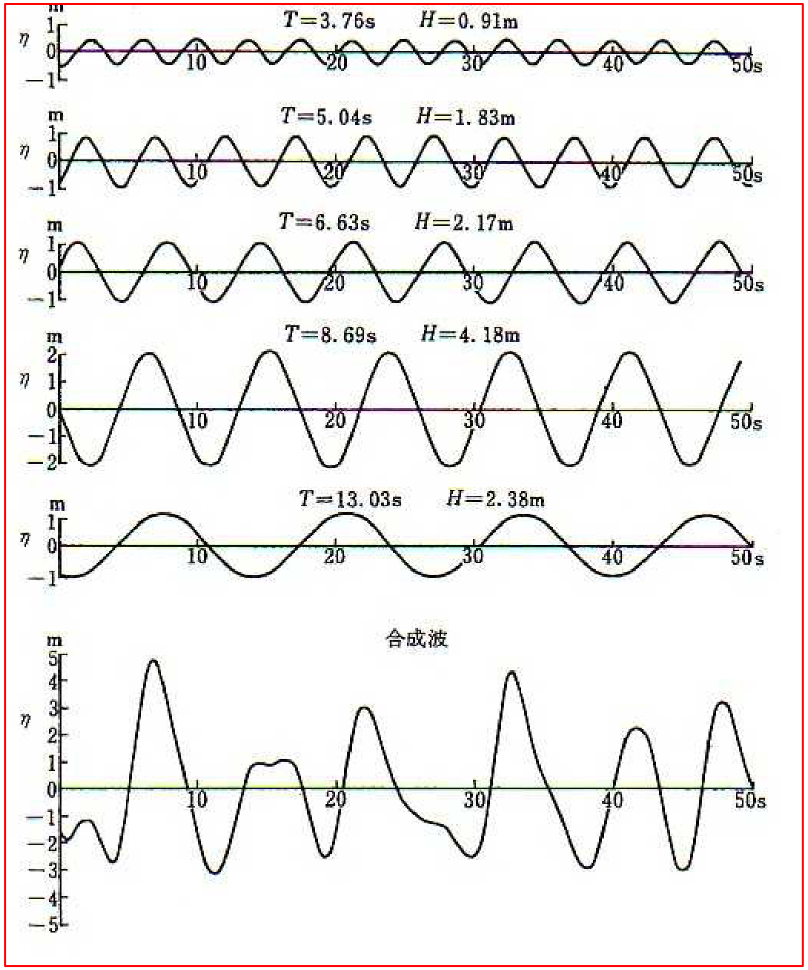
- Longuet－Higgins海浪模型

$$\eta(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\omega_n t+\varepsilon_n)$$

- 组成波的能量：$E=\frac{1}{2}\rho g a_n^2$



频率



王树青

6.2.1 频谱

- Longuet－Higgins海浪模型

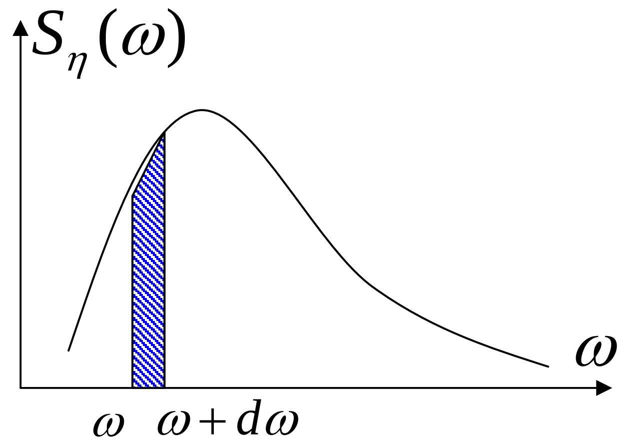
$$\eta(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\omega_n t+\varepsilon_n)$$

- 在频率ω—ω＋dω内的各组成波提供的能量为

$$\sum_{\omega}^{\omega+d\omega}\frac{1}{2}\rho g a_n^{\ 2}$$

- 定义S(ω)

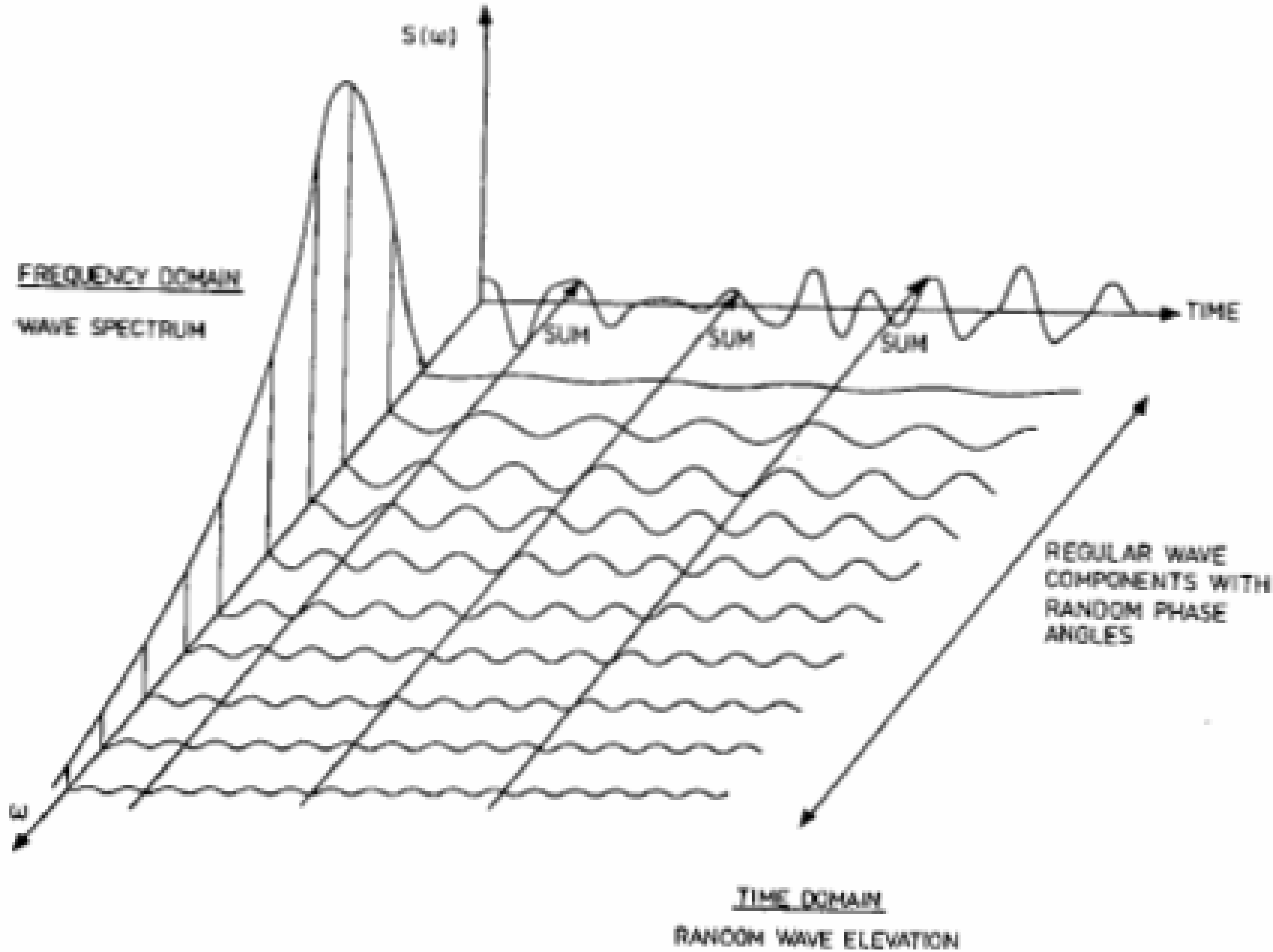
$$S_\eta(\omega)d\omega=\sum_{\omega}^{\omega+d\omega}\frac{1}{2}a_n^{\ 2}$$



中国海洋大学海洋工程系

海洋工程波浪力学

王树青

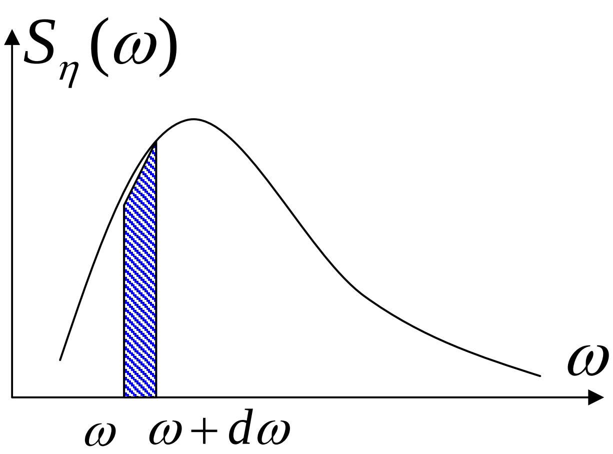


中国海洋大学海洋工程系

王树青

6.2.1 频谱

- S(ω)比例于位于间隔ω—ω+dω内各组成波提供的能量，所以称为能谱;
- S(ω)表示波能相对于波浪频率的分布，故称为频谱;
- 频谱S(ω)的特点
  - （1）ω=0附近，S(ω)很小;
  - （2）随ω增加，S(ω)先急剧增加在减小;
  - （3）ω→∞，S(ω)→0;



中国海洋大学海洋工程系
海洋工程波浪力学
王树青

6.2.1 频谱

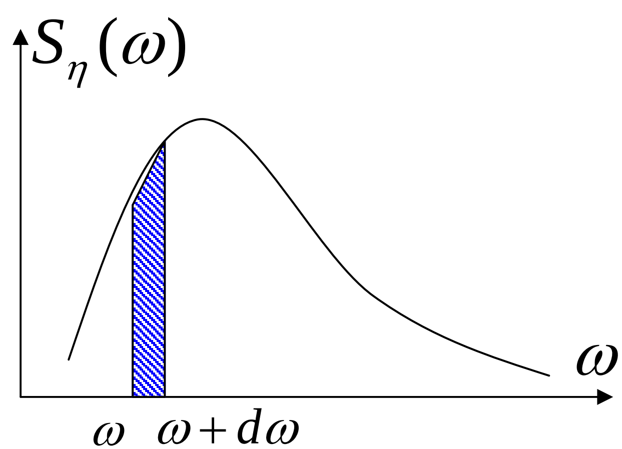
- 海浪的总能量等于频谱曲线下的面积，同时等于海浪波面η(t)的方差；

$$E=\int_0^{\infty} S_\eta(\omega)d\omega=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}a_n{}^2 \qquad m_0=\int_0^{\infty} S_\eta(\omega)d\omega$$

$$\sigma_\eta{}^2=\overline{\eta^2(t)}=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n{}^2(t)$$

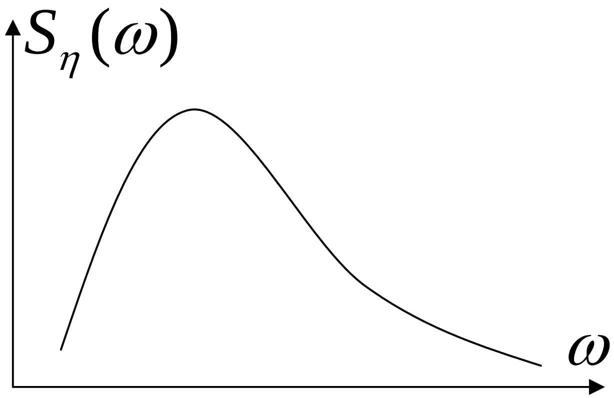
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}a_n{}^2\cos^2(\omega_n t+\varepsilon)d\varepsilon$$

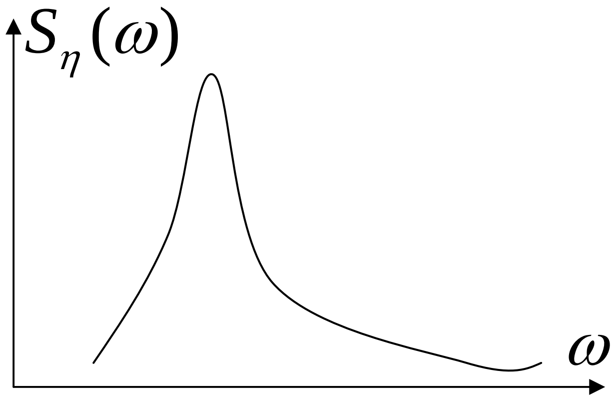
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}a_n{}^2$$



6.2.1 频谱

- 海浪谱的带宽
  - 理论上， S(ω)分布于ω=0－∞整个频率带内;
  - 但显著部分却集中于一段狭窄的频带内;
    - 风浪谱——宽带谱;
    - 涌浪谱——窄带谱;





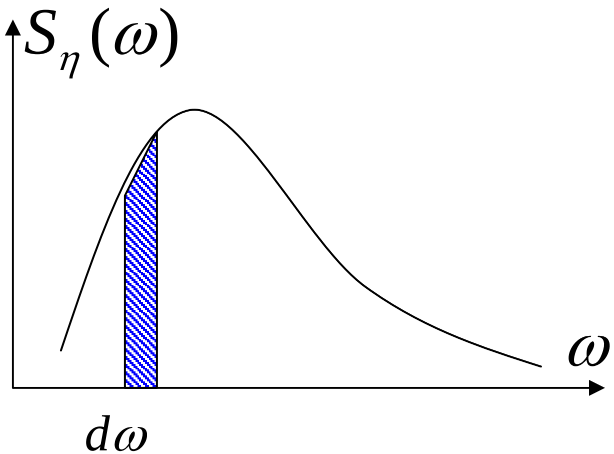
王树青

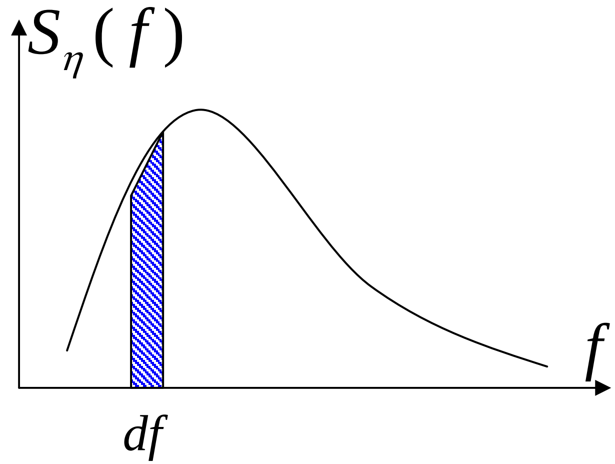
6.2.1 频谱

- 频谱的换算

$$S_\eta(\omega)d\omega = S_\eta(f)df \quad\Longrightarrow\quad S_\eta(f) = S_\eta(\omega)\frac{d\omega}{df}$$

$$S_\eta(f) = 2\pi S_\eta(\omega)$$





6.2.2 方向谱

- 频谱仅与组成波的频率有关，与组成波的传播方向无关；
- 实际上某定点的海面波动为来自不同方向组成波迭加的结果（主波向 + 其它方向组成波）；

$$\eta(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n x\cos\theta_n + k_n y\sin\theta_n - \omega_n t - \varepsilon_n)$$

$$S_\eta(\omega,\theta)d\omega d\theta = \sum_{\omega}^{\omega+d\omega}\sum_{\theta}^{\theta+d\theta}\frac{1}{2}a_n^{\ 2}$$

$$S_\eta(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi} S_\eta(\omega,\theta)d\theta$$

王树青

6.2.3 海浪谱的形式

Neumann谱

$$S_{\eta}(\omega)=\frac{A}{\omega^{p}}\exp\left[-\frac{B}{\omega^{q}}\right]$$

- A、B常常以风要素（风速、风时、风区）或海浪要素（波浪、周期）作为参量;
- p、q、A、B由不同海区的实测资料确定;

6.2.3 海浪谱的形式

- Neumann谱

$$S_\eta(\omega)=\frac{2.40}{\omega^6}\exp\left[-\frac{145.8}{\omega^2 H_s^{4/5}}\right]$$

- 谱峰频率：$\omega_m = 6.97 / H_s^{2/5}$
- Hs——有效波高（cm）：
- 谱的单位——m2 s

6.2.3 海浪谱的形式

- P-M谱

$$S_\eta(\omega)=\frac{0.78}{\omega^5}\exp\left[-\frac{3.11}{\omega^4 H_s^2}\right]$$

- 谱峰频率：$\omega_m = 1.257 / H_s^{1/2}$

- 1964年Pierson和Moskowitz依据北大西洋的实测资料

- P-M谱为经验谱，由于所依据的资料比较充分，分析方法比较合理，使用也比较方便，因此在海洋工程和船舶工程中得到了广泛的应用。

中国海洋大学海洋工程系

6.2.3 海浪谱的形式

布氏(Bretschneider)谱

$$S(\omega)=\frac{1.25}{4}H_s{}^2\frac{\omega_0{}^4}{\omega^5}e^{-1.25(\omega_0/\omega)^4}$$

- 谱峰频率：　$\omega_0=5.98/H_s$

- Bretschneider于1959年由无因次波高和无因次波长的联合分布函数导出了两参数谱，它适用于成长阶段充分或充分成长的海浪。

王树青

6.2.3 海浪谱的形式

- JONSWAP谱

$$S_\eta(\hat{\omega}) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5}\exp\left(-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^4\right)\gamma^{\exp\left(-\frac{(\omega-\omega_m)^2}{2\sigma^2\omega_m{}^2}\right)}$$

- 谱峰升高因子（1.5－6，均值3.3）　$\gamma = \dfrac{S_\eta(\omega_m)}{S_\eta(\omega_m)_{P-M}}$
- 峰形系数σ　$\begin{cases}\omega \le \omega_m & \sigma = 0.07\\ \omega \ge \omega_m & \sigma = 0.09\end{cases}$
- 系数α（无因次风区的函数）$\alpha = 0.076\tilde{x}^{-0.22} = 0.076\left(\dfrac{gx}{U^2}\right)^{-0.22}$
- 谱峰频率　$\omega_m = 22\dfrac{g}{U}\tilde{x}^{-0.33}$

中国海洋大学海洋工程系

王树青

6.2.3 海浪谱的形式

- JONSWAP谱 ——另一种形式

$$S_\eta(\hat{\omega}) = \alpha^* H_s^2 \frac{\omega_m^4}{\omega^5} \exp\left(-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^4\right)\gamma^{\exp\left(-\frac{(\omega-\omega_m)^2}{2\sigma^2\omega_m^2}\right)}$$

- 系数 $\alpha^* = \dfrac{0.0624}{0.230+0.0336\gamma-0.185(1.9+\gamma)^{-1}}$

- JONSWAP谱是由Hasselnan等在“联合北海波浪计划”期间提出的。JONSWAP谱的形式可由P-M经修改得到;

- JONSWAP谱是由中等风况和有限风距情况测得的，多数使用经验表明，此谱和实测结果是符合的，而且可以适用不同成长阶段的风浪，因此日益得到了广泛的应用。

中国海洋大学海洋工程系

6.2.3 海浪谱的形式

- Wen's谱(文氏谱)

  - 浅水风浪谱

$$0 \le f \le 1.05/T_s$$

$$S(f) = 0.0687 H_s^2 T_s P \times \exp\left\{-95 \times \left[\ln \frac{P(5.813 - 5.137H^*)}{(6.77 - 1.088P + 0.013P^2)(1.307 - 1.426H^*)}\right](1.1T_s f - 1)^{12/5}\right\}$$

$$f > 1.05/T_s$$

$$S(f) = 0.0687 H_s^2 T_s \times \frac{(6.77 - 1.088P + 0.013P^2)(1.307 - 1.426H^*)}{5.813 - 5.137H^*} \times \left[\frac{1.05}{T_s f}\right]^{(4-2H^*)}$$

H^*——水深因子 $H^* = 0.626 H_s / d$

王树青

6.2.3 海浪谱的形式

- Wen’s谱（文氏谱）
  - 深水风浪谱

$$0 \le f \le 1.05/T_s$$

$$S(f) = 0.0687 H_s^2 T_s P \times \exp\left\{ -95 \times \left[\ln \frac{P}{(1.522 - 0.245P + 0.00292P^2)} \right] (1.1T_s f - 1)^{12/5} \right\}$$

$$f > 1.05/T_s$$

$$S(f) = 0.0824(H_s^2 / T_s^2) \times (1.522 - 0.245P + 0.00292P^2) / f^4$$

P——尖度因子 $P = 95.3 H_s^{1.35} / T_s^{2.7}$

6.2.3 海浪谱的形式

方向谱

- 一般形式 $S_\eta(\omega,\theta)=S_\eta(\omega)G(\omega,\theta)$
- 方向分布函数

$$\int_{-\pi}^{\pi}G(\omega,\theta)d\theta=1$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}G(\omega,\theta)d\theta=1$$

- 方向分布函数的形式

$$G(\omega,\theta)=k\cos^n\theta$$

$$k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

王树青

王树青

6.2.3 海浪谱的形式

- 方向谱
  - Longuet-Higgins方向分布函数

$$G(f,\theta)=G'(s)\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{2s}$$

$$G'(s)=2^{2s-1}\frac{\Gamma^2(s+1)}{\Gamma(2s+1)}$$

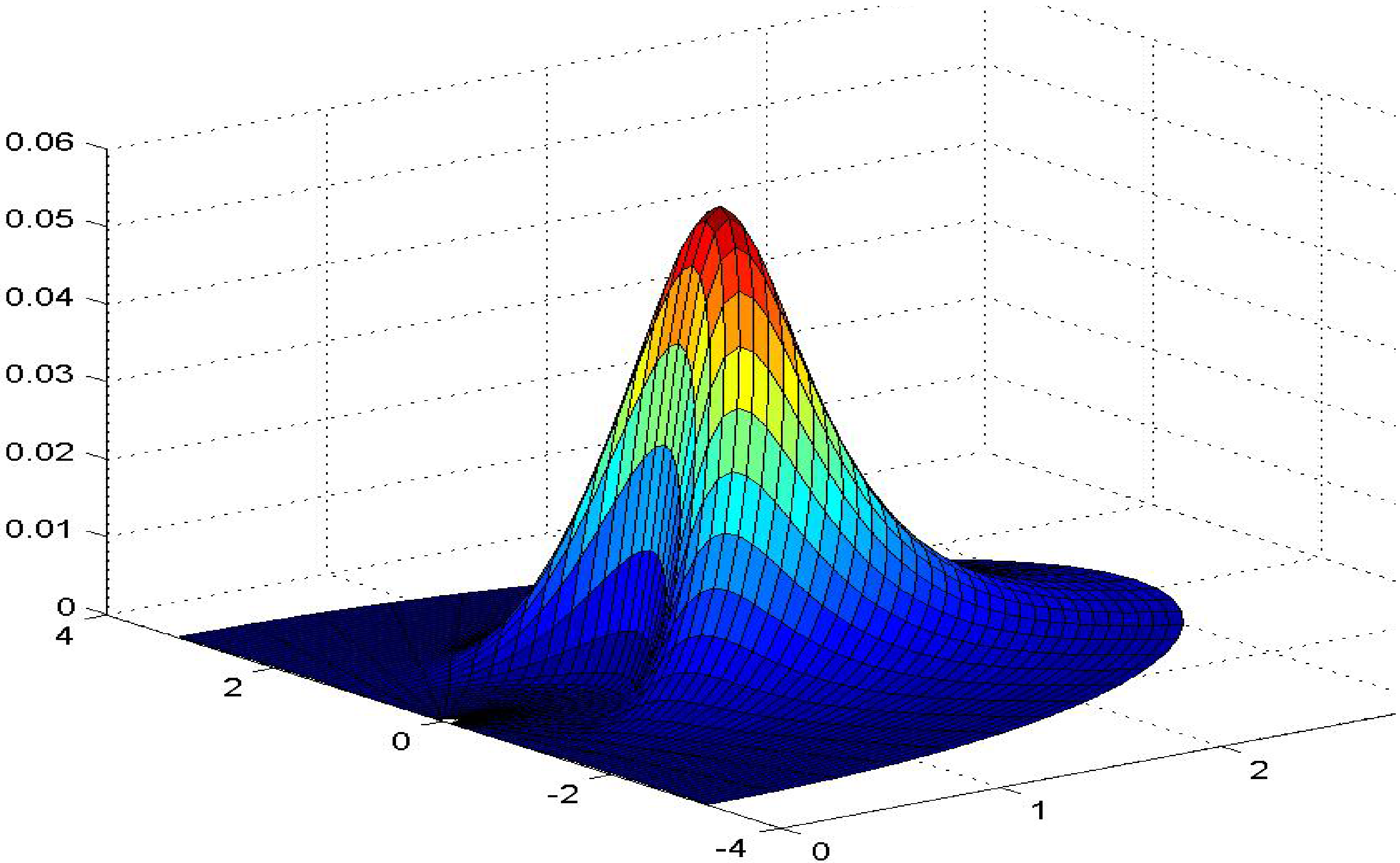
王树青

6.2.3 海浪谱的形式

- 方向谱

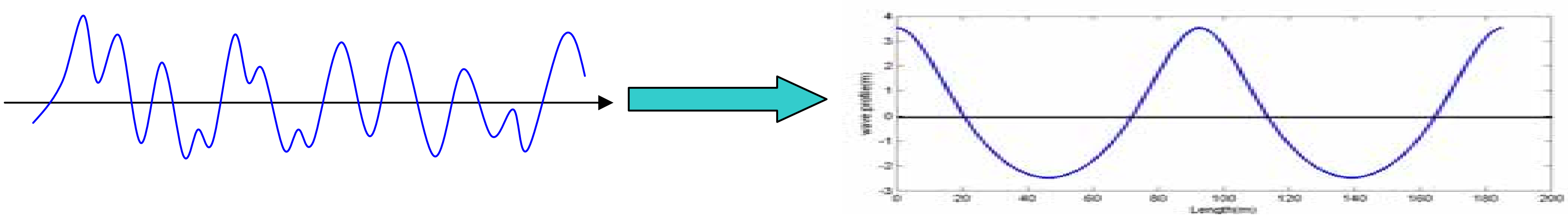
  - SWOP谱的方向分布函数

$$G(\omega,\theta)=\frac{1}{\pi}\{1+[0.5+0.82\exp(-\frac{\omega^4U^4}{2g^4})]\cos 2\theta$$
$$+[0.32\exp(-\frac{\omega^4U^4}{2g^4})]\cos 4\theta\}$$

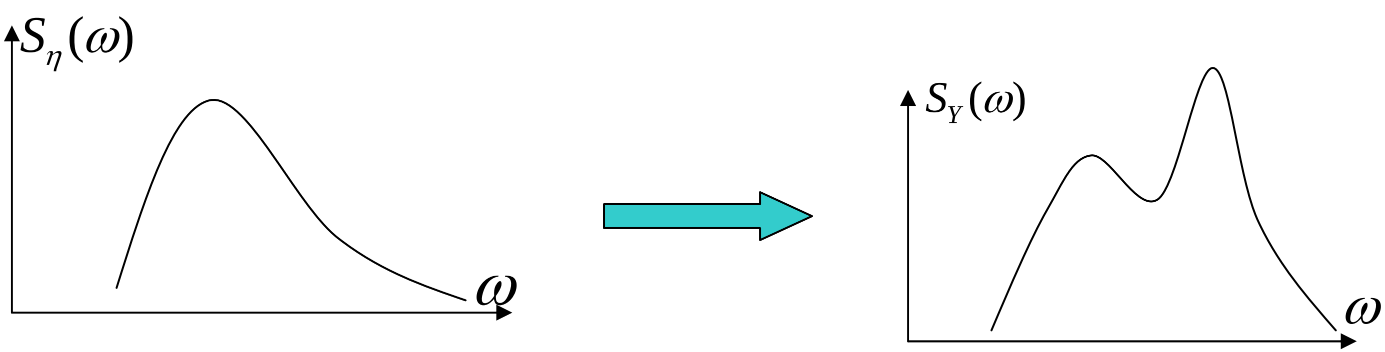

0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
4
2
0
-2
-4
0
1
2

6.3 海工结构物上的随机波浪力

- 特征波法（设计波法）



- 谱分析法



王树青

6.3.1 特征波法（设计波法）

❖ 概念：

特征波法又称为设计波法，是从统计意义上在随机波浪系列种选用某一**特征波**（如有效波或最大波）作为**单一的规则波**，近似分析随机波浪对海工结构物的作用。

❖ 步骤：

确定设计波浪要 → 选择波浪理 → 波浪力计

6.3.1 特征波法（设计波法）

- 设计波浪要素：

是指在某一确定的重现期、某一特征波所对应的波高和周期；包括两个方面（**1**）设计波浪的重现期；（**2**）设计特征波；

比如：设计波高采用**50**年一遇、波列累积概率为**1**％的高$H_{1\%}$，设计波周期采用平均周期**T**;

王树青

6.3.1 特征波法（设计波法）

❖ 重现期与危险概率（保证安全的概率）

假设特征波高（最大或有效波高）的年最大值不超过H_R的概率为$P(H\le H_R)$，则任一年超过H_R的危险概率为$1-P(H\le H_R)$，于是重现期为：

$$T_R=\frac{1}{1-P(H\le H_R)}$$

对应的H_R称为T_R年一遇的特征波高值。

王树青

中国海洋大学海洋工程系

6.3.1 特征波法（设计波法）

❖ 重现期与危险概率（保证安全的概率）

- 不能认为具有T_R年重现期的波高H_R将在每T_R年出现一次，也不能预测它将在何时出现。

- 某海工结构物寿命n年，则n年内，设计波高年最大值超过H_R的概率（危险概率）：

$$F(H \geq H_R) = 1 - \left[P(H \leq H_R)\right]^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{T_R}\right)^n$$

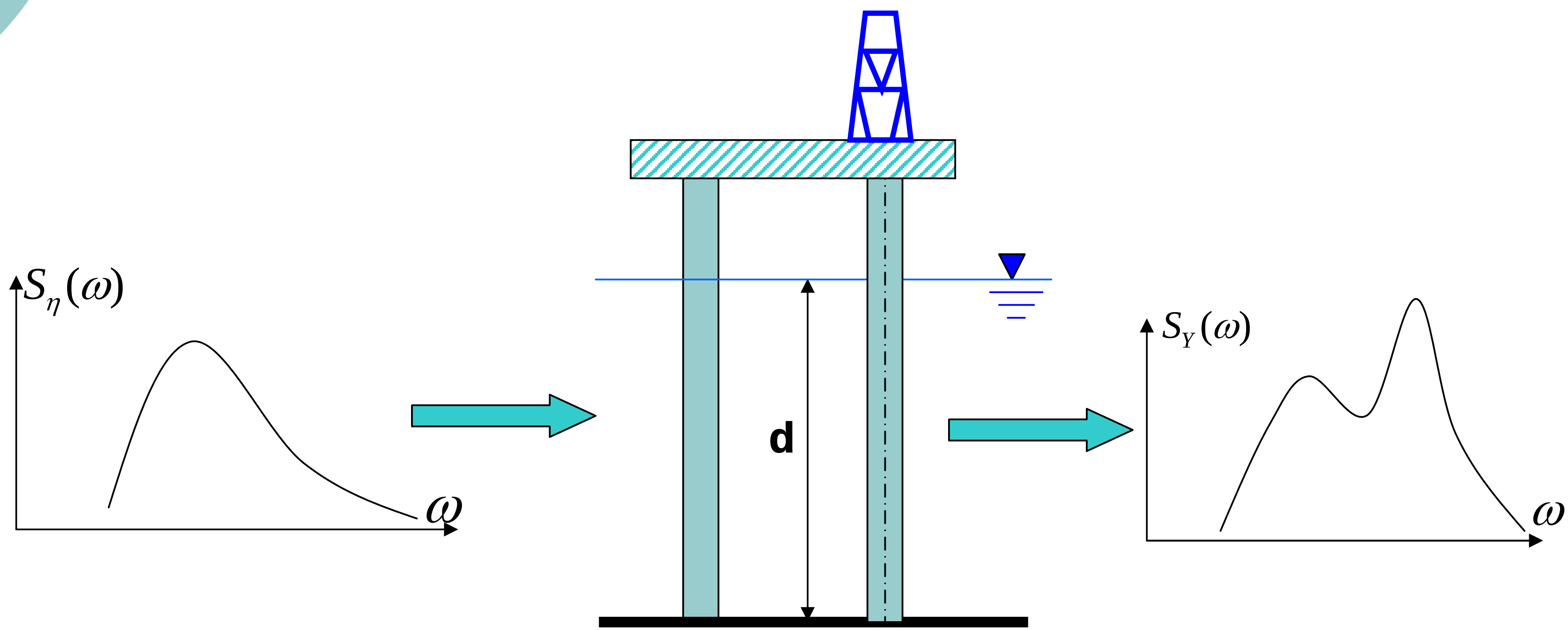
若$T_R=n$（n较大），则$P(H>H_R)=1-1/e=0.632$。即按照H_R设计，在n年内危险概率为63.2％，保证率仅为36.8％；

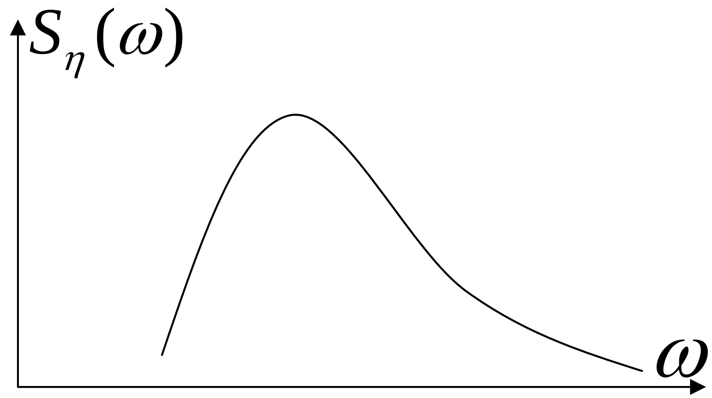
王树青

6.3.2 谱分析法

❖ 概念

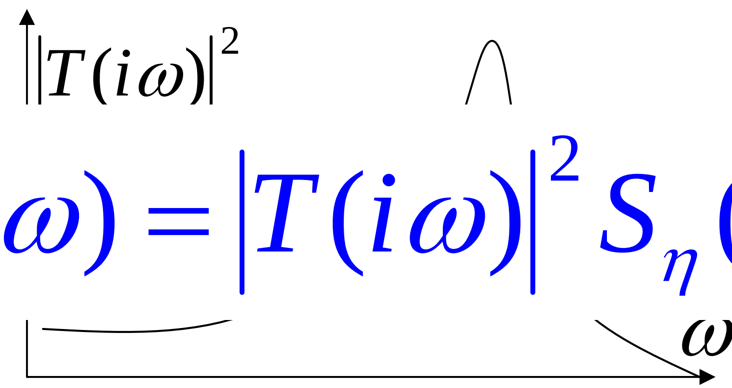
所谓谱分析法，即由已知的海浪谱推求出作用在结构物上的波浪力谱，从而确定不同累积概率的波浪力的方法





输入谱密度

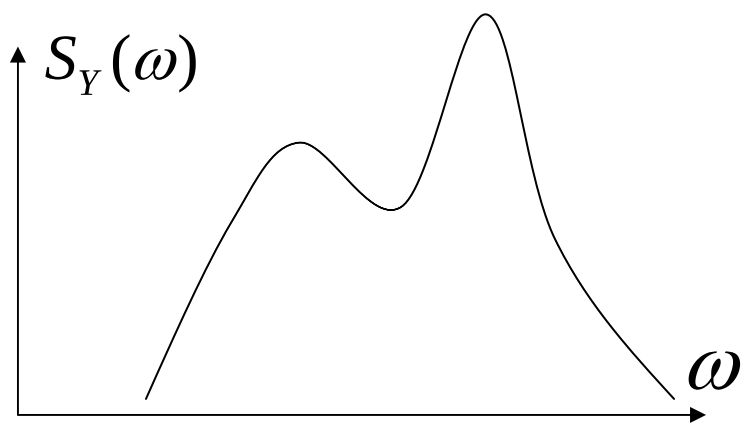
输入
（作用



$$S_Y(\omega) = |T(i\omega)|^2 S_\eta(\omega)$$

系统传递函数

结
系



输出谱密度

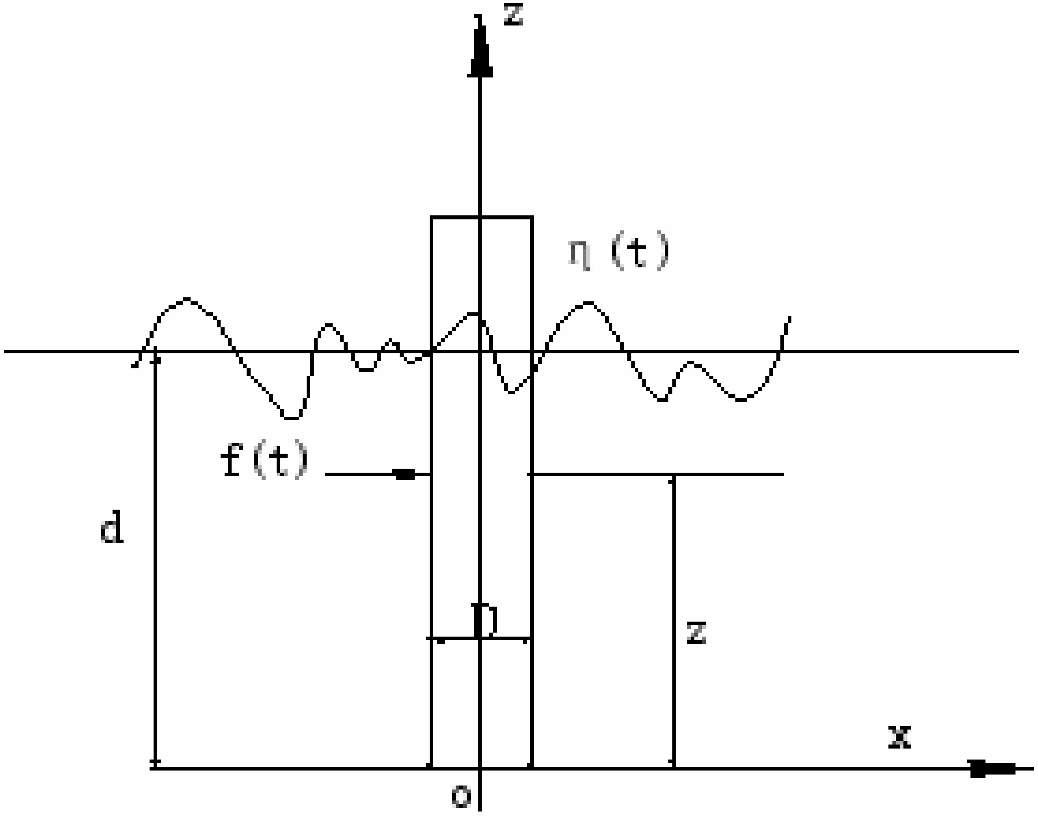
输出
（反应

王树青

一. 作用在小直径圆柱上波浪力谱

$$f(t)=C_M\rho\frac{\pi D^2}{4}a(t)+\frac{1}{2}C_D\rho Du(t)\left|u(t)\right|$$

$$f(t)=C_2a(t)+C_1u(t)\left|u(t)\right|$$



中国海洋大学海洋工程系

王树青

一. 作用在小直径圆柱上波浪力谱

❖ 首先推导波面谱和速度谱与加速度谱的关系

$$\eta = \frac{H}{2}\cos(kx - \omega t) \qquad u_x = \frac{\pi H}{T}\frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd}\cos(kx - \omega t)$$

$$u(t) = T_u(\omega)\eta(t) \longleftarrow u(t) = \omega\frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd}\eta(t)$$

水平速度传递函数

$$S_u(\omega) = |T_u(\omega)|^2 S_\eta(\omega)$$

$$|T_u(\omega)|^2 = \left[\omega\frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd}\right]^2$$

中国海洋大学海洋工程系

一. 作用在小直径圆柱上波浪力谱

❖ 首先推导波面谱和速度谱与加速度谱的关系

$$\eta = \frac{H}{2}\cos(kx - \omega t) \qquad a_x = \frac{2\pi^2 H}{T^2}\frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd}\sin(kx - \omega t)$$

$$a(t) = \omega^2 \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd}\eta(t)$$

$$a(t) = T_a(\omega)\eta(t)$$

$$S_a(\omega) = \left|T_a(\omega)\right|^2 S_\eta(\omega)$$

水平加速度传递函数

$$\left|T_a(\omega)\right|^2 = \left[\omega^2 \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd}\right]^2$$

海洋工程波浪力学

王树青

中国海洋大学海洋工程系

一. 作用在小直径圆柱上波浪力谱

- 其次推导惯性力谱和拖曳力谱

$$f(t) = C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} a(t) + \frac{1}{2} C_D \rho D u(t) |u(t)|$$

$$f(t) = C_2 a(t) + C_1 u(t) |u(t)|$$

$$f_I(t) = C_2 a(t) \qquad f_D(t) = C_1 u(t) |u(t)|$$

王树青

一. 作用在小直径圆柱上波浪力谱

- (1) 推导惯性力谱

$$f_I(t) = C_2 a(t)$$

$$|T_a(\omega)|^2 = \left[\omega^2 \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd}\right]^2$$

$$S_{f_I}(\omega) = C_2^2 S_a(\omega)$$

$$S_a(\omega) = |T_a(\omega)|^2 S_\eta(\omega)$$

$$S_{fI}(\omega) = C_2^2 |T_a(\omega)|^2 S_\eta(\omega)$$

惯性力传递函数

$$|T_{fI}(\omega)|^2 = \left[C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} \omega^2 \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd}\right]^2$$

$$S_{fI}(\omega) = |T_{fI}(\omega)|^2 S_\eta(\omega)$$

一. 作用在小直径圆柱上波浪力谱

❖ （1）推导总惯性力谱

$$f_I(t) = C_2 a(t)$$

$$F_I(t) = C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} \mathrm{gth}kd \frac{H}{2} \sin\theta$$

$$\left|T_{F\,I}(\omega)\right|^2 = \left[C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} \mathrm{gth}kd\right]^2$$

$$S_{F\,I}(\omega) = \left[C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} \mathrm{gth}kd\right]^2 S_\eta(\omega)$$

一. 作用在小直径圆柱上波浪力谱

❖ （2）推导**拖曳力谱** $f_D(t)=C_1u(t)|u(t)|$

可以看出，水平波力的拖曳力项因含有u|u|而属于非线性项，需要将其进行线性化处理（Borgman）

$$|u|u=cu$$

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}(|u|u-cu)^2 p(u)du \Rightarrow \frac{dQ}{dc}=0$$

$$\sigma_u{}^2=\int_0^{\infty}S_u(\omega)d\omega$$

$$c=\sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma_u$$

$$u|u|=\sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma_u u$$

$$f_D(t)=C_1\sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma_u u(t) \Rightarrow S_{fD}(\omega)=\left[C_1\sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma_u\right]^2 S_u(\omega)$$

中国海洋大学海洋工程系

王树青

一. 作用在小直径圆柱上波浪力谱

❖ （2）推导拖曳力谱

$$f_D(t) = C_1 u(t)\left|u(t)\right|$$

$$S_{fD}(\omega) = \left[C_1\sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma_u\right]^2 S_u(\omega)$$

$$S_u(\omega) = \left|T_u(\omega)\right|^2 S_\eta(\omega)$$

$$\left|T_u(\omega)\right|^2 = \left[\omega\frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd}\right]^2$$

$$S_{fD}(\omega) = \left[C_1\sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma_u\omega\frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd}\right]^2 S_\eta(\omega)$$

$$S_{fD}(\omega) = \left|T_{fD}(\omega)\right|^2 S_\eta(\omega)$$

一. 作用在小直径圆柱上波浪力谱

❖ （2）推导总拖曳力谱

$$f_D(t) = C_1 u(t)|u(t)|$$

$$S_{fD}(\omega) = \left[C_1 \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_u \omega \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd} \right]^2 S_\eta(\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$S_{FD}(\omega) = \left[C_1 \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\omega}{\operatorname{sh} kd} \int_0^d \sigma_u \operatorname{ch} kz \, \mathrm{d} z \right]^2 S_\eta(\omega)$$

中国海洋大学海洋工程系

一. 作用在小直径圆柱上波浪力谱

❖ 最后得到水平波力谱

$$f(t) = C_1 u(t)\left|u(t)\right| + C_2 a(t)$$

$$S_f(\omega) = \left[C_1\sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma_u \omega \frac{\mathrm{ch}\, kz}{\mathrm{sh}\, kd}\right]^2 S_\eta(\omega) + \left[C_2\omega^2 \frac{\mathrm{ch} kz}{\mathrm{sh} kd}\right]^2 S_\eta(\omega)$$

$$S_F(\omega) = \left[C_1\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\omega}{\mathrm{sh}\, kd}\int_0^d \sigma_u \,\mathrm{ch}\, kz\,\mathrm{d}\, z\right]^2 S_\eta(\omega) + \left[C_2\frac{\omega^2}{k}\right]^2 S_\eta(\omega)$$

海洋工程波浪力学

王树青

二. 作用在大直径圆柱上波浪力谱

$$f(t) = -\frac{1}{2} C_M \rho g \frac{\pi D^2}{4} kH \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd} \sin \omega t$$

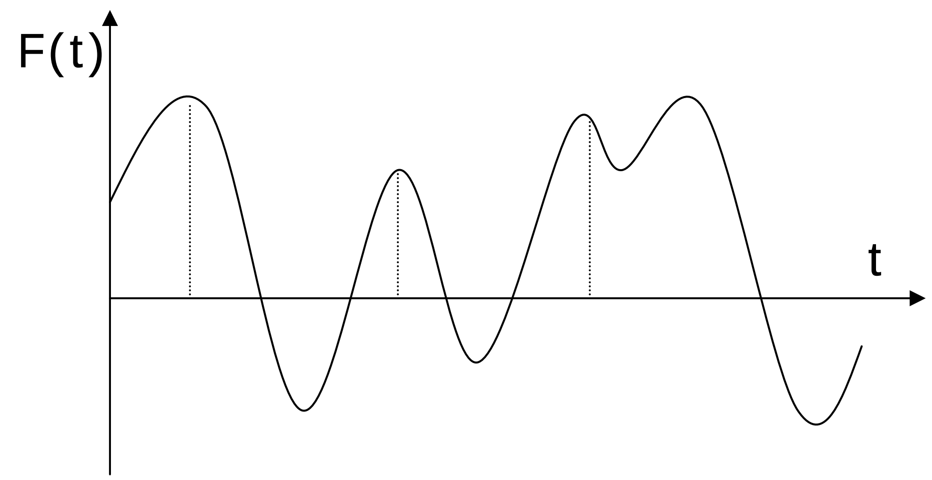
$$f(t) = \left[C_M \rho g \frac{\pi D^2}{4} k \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd} \right] \eta(t)$$

$$S_f(\omega) = \left[C_M \rho g \frac{\pi D^2}{4} k \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kd} \right]^2 S_\eta(\omega)$$

王树青

三. 波浪力的特征值

波面$\eta(t)$符合正态分 → 波面极大值符合瑞利分



波浪力F(t)符合正态分 → 波浪力极大值符合瑞利分

王树青

三. 波浪力的特征值

- 瑞利分布（分布密度） $p(F_m) = \frac{F_m}{\sigma_F^2} \exp\left[-\frac{F_m^2}{2\sigma_F^2} \right]$

- 对应的累积概率 $F(F_m) = F\left[F_m \geq (F_m)_{F\%}\right] = \int_{(F_m)_{F\%}}^{\infty} p(F_m) dF_m$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(F_m)_{F\%}}{\sigma_F} \right)^2 \right]$$

- 累积概率F(%)的最大总波力

$$(F_m)_{F\%} = \left[2\ln\left(\frac{1}{F(\%)} \right) \right]^{1/2} \sigma_F = k_\sigma \sigma_F$$